UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE UNA GENERALIZACIÓN DEL ESPACIO DE SCHLUMPRECHT

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

P R E S E N T A:

JAVIER ALEJANDRO CHÁVEZ DOMÍNGUEZ.

ENERO DE 2006 MÉXICO, D.F.

Introducción

En la teoría de geometría de espacios de Banach, es de interés saber cómo son y cómo están relacionados los subespacios cerrados de un espacio dado. Algunos de los ejemplos más conocidos y estudiados de espacios de Banach son los espacios c_0 y ℓ_p, por lo que resulta pertinente preguntarse si todo espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a alguno de estos espacios. Este problema, propuesto desde los treintas, estuvo abierto durante largo tiempo. No fue sino hasta 1974 que Boris S. Tsirelson [27] sorprendió a los especialistas al construir un ejemplo relativamente simple de un espacio de Banach que no contiene a c_0 ni a ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, resolviendo el problema.

Otro problema, relacionado con el anterior, es el siguiente. Si un espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_p, ¿contendrá copias casi isométricas de éste? Es decir: Sea X el espacio c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$, con su norma usual $\|\cdot\|$. Sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente en X. Dado $\varepsilon > 0$, ¿existe un subespacio Y de X tal que existe un isomorfismo $T : (Y, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ con $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < 1 + \varepsilon$? Robert C. James [18] probó que la respuesta es afirmativa en los casos de c_0 y ℓ_1.

Este último problema está fuertemente relacionado con el concepto de espacio distorsionable. Dada $\lambda > 1$, se dice que un espacio normado $(Y, \|\cdot\|)$ es λ-*distorsionable* si existe una norma $|||\cdot|||$ en Y equivalente a $\|\cdot\|$ tal que para todo subespacio $Z \subset Y$

$$\sup \left\{ \frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z, \|z_1\| = \|z_2\| = 1 \right\} \geq \lambda.$$

Un espacio es *distorsionable* si es λ-distorsionable para algún $\lambda > 1$, y es *arbitrariamente distorsionable* si es λ-distorsionable para toda $\lambda > 1$. En este lenguaje, lo que James probó es que c_0 y ℓ_1 no son distorsionables.

Este concepto dio lugar al problema de la distorsión en general: ¿contiene un X dado un subespacio distorsionable? V. D. Milman [23] probó que si X no tiene ningún subespacio distorsionable entonces X contiene una copia casi isométrica de c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$, y preguntó si existen espacios distorsionables. Unos cuantos años después Tsirelson [27] produjo su ya mencionado ejemplo que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, con lo que probó la existencia de un espacio de Banach distorsionable. Sin embargo, el trabajo de Milman contiene implícitamente el resultado, redescubierto en [17], que si X no contiene a c_0 o ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ entonces algún subespacio de X es distorsionable. Entonces, para resolver el problema de la distorsión en general basta considerar el caso ℓ_p, $1 < p < \infty$, lo que se conoce como "el problema de la distorsión".

El espacio de Tsirelson fue el primer espacio de Banach "no clásico". Las normas en los espacios de Banach (de sucesiones) "clásicos", como c_0, ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de James, etc., se definen mediante fórmulas explícitas. En el espacio de Tsirelson, en cambio, la norma se puede definir mediante una fórmula implícita [12]. Desde entonces se han construido diversas variantes del espacio de Tsirelson con distintas propiedades "patológicas" [7], cuyas normas también se definen de manera implícita, y que han servido para responder otras preguntas que llevaban mucho tiempo sin respuesta, algunas desde la época de Banach.

Aunque de los trabajos de Milman y Tsirelson se sigue la existencia de un espacio distorsionable, aún faltaba por saber si existe o no un espacio arbitrariamente distorsionable. Basado en el ejemplo de Tsirelson, en 1991 T. Schlumprecht respondió afirmativamente a la pregunta [26], construyendo el espacio que lleva su nombre y que en la literatura suele ser denotado por S. Una vez que se dio a conocer el espacio de Schlumprecht, no pasó mucho tiempo antes de que se construyeran importantes variaciones de éste que resolvieron varios problemas abiertos, lo cual confirma su importancia matemática e histórica.

En [15], W.T. Gowers y B. Maurey mostraron que el concepto de distorsión también está relacionado con otro famoso problema, el de la sucesión básica incondicional. Si X es un espacio de Banach, una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es una *base de Schauder* (o simplemente una base) de X si toda $x \in X$ puede ser escrita de manera única como una serie convergente en norma de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Esta definición claramente depende del orden de los x_n, y ciertamente es posible que una permutación de una base no sea una base. Por otro lado, muchas bases que se encuentran naturalmente, como las bases estándar de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, son bases bajo cualquier permutación. Por lo tanto es natural dar un nombre a este tipo especial de bases, a las que se llama *incondicionales*. Si una base incondicional además es equivalente a todas sus subsucesiones, se llama *subsimétrica*. Una *sucesión básica* es una sucesión que es base del subespacio cerrado generado por ella misma.

Claramente, un espacio de Banach con base es separable. Por un largo tiempo un gran problema no resuelto era si todo espacio de Banach separable tiene una base. Esta pregunta fue respondida negativamente por P. Enflo en 1973 [10]. Por otro lado, no es difícil mostrar que todo espacio de Banach contiene un subespacio con base. Los espacios con bases incondicionales tienen mucha más estructura que los espacios en general, por lo que es fácil encontrar ejemplos de espacios que no las tienen. Por ejemplo, los espacios $C([0,1])$ y L_1 no tienen ninguna base incondicional. Esto nos lleva a la pregunta de si todo espacio contiene un subespacio de dimensión infinita con una base incondicional, que es precisamente el problema de la sucesión básica incondicional.

En el verano de 1991, W.T. Gowers encontró un espacio sin sucesiones básicas incondicionales. Poco después, B. Maurey también encontró uno independientemente. Al comparar sus ejemplos descubrieron que eran casi idénticos, al igual que las pruebas de que efectivamente resolvían el problema de la sucesión básica incondicional, así que decidieron publicar juntos y trabajar sobre otras propiedades del espacio. El susodicho ejemplo es un refinamiento del espacio de Schlumprecht, puesto que la definición (implícita) de la norma es casi idéntica excepto por un término extra.

Gracias a una observación de W. B. Johnson, Gowers y Maurey notaron que su espacio es *hereditariamente no factorizable (H.N.F.)*, es decir, ninguno de sus subespacios cerrados de dimensión infinita puede ser expresado como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. Esto respondió una pregunta de Lindenstrauss, a saber, si todo espacio de Banach de dimensión infinita podía ser expresado como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. Además, prueba que en general el espacio de operadores lineales acotados de un espacio de Banach en sí mismo no necesariamente contiene proyecciones no triviales.

Muy poco tiempo después, Gowers logró resolver, construyendo contraejemplos, otros dos problemas abiertos utilizando variantes de este espacio [13, 14]. El primero es el problema del hiperplano de Banach, que tiene sus orígenes en el libro de Banach [3]: ¿es todo espacio de Banach isomorfo a sus hiperplanos (subespacios cerrados de codimensión uno)? El segundo es el problema de Schroeder-Bernstein para espacios de Banach: si X y Y son espacios de Banach tales que cada uno de ellos es isomorfo a un subespacio complementado del otro, ¿deben X y Y ser isomorfos? En ambos casos, la respuesta es negativa.

Unos cuantos meses después de que se obtuvieron los resultados de [15], el problema de la distorsión también fue resuelto, por E. Odell y T. Schlumprecht [24], quienes determinaron que ℓ_p $(1 < p < \infty)$ es arbitrariamente distorsionable, respondiendo a una de las preguntas planteadas anteriormente.

El espacio de Schlumprecht, además de servir como inspiración para construir otros espacios que han proporcionado respuestas a problemas abiertos, ha sido estudiado por sí mismo. A continuación algunos ejemplos.

G. Androulakis y T. Schlumprecht prueban en [2] que todo subespacio de dimensión infinita de S contiene un subespacio isomorfo a S (i.e. S es *complementablemente minimal*) y que toda base bloque complementada en S tiene una subsucesión que genera un espacio isomorfo a S (i.e. S es *subsecuencialmente primo*). De acuerdo con ellos mismos, este último resultado sugiere que en S “no hay muchas estructuras distintas” (salvo isomorfismo), pero después en [1] demuestran que esto en realidad no es correcto, pues encuentran una condición suficiente para que una base bloque en S tenga una sucesión subsimétrica, y que existe una familia no numerable de bases bloque seminormalizadas subsimétricas que no son isomorfas entre sí.

Por otro lado, D. Kutzarova y P.K. Lin [20] demuestran que ℓ_∞ es finitamente disjuntamente representable en S, S contiene un ℓ_1-*spreading model*, y para cualquier sucesión (n_k) de números naturales, S es isomorfo al espacio $(\sum_{k=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^{n_k})_S$.

En la tesis de licenciatura [9] se define una generalización de la construcción de S y, usando el enfoque de Gowers y Maurey [15], se prueba que de esta manera se obtiene una infinidad no numerable de espacios de Banach arbitrariamente distorsionables no isomorfos entre sí. El presente trabajo es una continuación de lo anterior, en el que estudiamos si tales espacios comparten con S otra de sus propiedades conocidas: ser complementablemente minimal.

Por supuesto, hay otras generalizaciones del espacio de Schlumprecht. En [8], P.G. Casazza, N.J. Kalton, Denka Kutzarova and M. Mastyło construyen toda una clase de espacios super-reflexivos complementablemente minimales, utilizando métodos de interpolación. En muchos trabajos que tratan de S o sus variaciones (ver por ejemplo [26], [2], [15], [8]), se indica explícitamente que los resultados son válidos si se modifica la construcción del espacio sustituyendo la función $f(x) = \log_2(x+1)$ por cualquier otra que siga satisfaciendo ciertas propiedades. En [8] incluso se menciona explícitamente que claramente los resultados son válidos para una clase de funciones mucho más amplia que simplemente $\log_2(x+1)$, pero eso no ha sido determinado con precisión hasta la fecha. La generalización propuesta en [9] aprovecha este hecho, proponiendo explícitamente una familia de funciones para las cuales por lo menos algunos de los resultados probados para S siguen siendo válidos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enlistan las definiciones y los resultados más relevantes para el trabajo que se presenta. En la sección 1.1 se define notación matemática usual, y la sección 1.2 consiste de material muy conocido acerca de bases de Schauder. El contenido de la sección 1.3 no es tan conocido, ha sido extraído de la tesis de licenciatura [9]. Es fundamental para este trabajo porque contiene la definición de la generalización del espacio de Schlumprecht que estudiaremos más adelante, así como algunas de sus propiedades.

1.1. Notación

Como es usual, denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, por $\mathbb{R}$ al de los reales y por $\mathbb{R}_+$ al de los reales positivos. Todos los espacios vectoriales que manejaremos lo serán sobre el campo $\mathbb{K}$, que siempre será los reales o los complejos. Cuando no sea necesario referirnos directamente al campo, lo omitiremos en los enunciados.

La cardinalidad de un conjunto A será denotada por $|A|$, y dados números reales a y b denotamos por $a \vee b$ al máximo de a y b.

Para $p \in [1, \infty]$, la norma usual del espacio ℓ_p será denotada por $\|\cdot\|_{\ell_p}$. En el caso particular de $p = \infty$ también denotaremos $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\ell_\infty}$.

1.2. Bases de Schauder

El concepto de base de Schauder juega un papel muy importante en la teoría de geometría de espacios de Banach. A continuación enlistamos brevemente los conceptos y teoremas relacionados más importantes para lo que se presenta más adelante. Para las pruebas de los resultados o simplemente profundizar en el tema, se sugieren [11], [21] y [22].

Definición 1.1 *Sea X un espacio de Banach.*

(I) *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ es una* **base de Schauder** *(o simplemente una* **base***) de X si toda $x \in X$ puede ser escrita de manera única como una serie convergente en* *norma de la forma* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

(II) *Una* **sucesión básica** *es una sucesión que es base del subespacio cerrado generado por ella misma.*

(III) *Una sucesión básica* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es* **seminormalizada** *si existe* $M > 0$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M$, *y es* **normalizada** *si* $\|x_n\| = 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(IV) *Una base* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* X *se llama una* **base incondicional**, *si para toda* $x \in X$ *su expansión* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *en términos de la base es una serie incondicionalmente convergente.*

(V) *Dos sucesiones básicas* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach son* **equivalentes** *si para toda sucesión de escalares* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ *converge.*

(VI) *Si una base incondicional además es equivalente a todas sus subsucesiones, se llama* **subsimétrica**.

A continuación se caracterizan, respectivamente, las bases, la equivalencia entre sucesiones básicas y las bases incondicionales.

Teorema 1.2 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X. *Entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una base de* X *si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

(I) $x_n \neq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(II) *Existe* $M \geq 1$ *tal que para toda sucesión de escalares* $\{a_i\}_{i=1}^{m}$, *si* $n < m$ *entonces*

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \leq M \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \Big\|.$$

(III) *El espacio vectorial cerrado generado por* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es* X.

Para una sucesión básica, por definición su *constante de base* es el mínimo número M que satisface (II).

Teorema 1.3 *Dos sucesiones básicas* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach son equivalentes si y sólo si existe* $K > 0$ *tal que para toda* $m \in \mathbb{N}$ *y toda sucesión de escalares* $(a_i)_{i=1}^{m}$,

$$\frac{1}{K} \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \Big\| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \Big\| \leq K \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i y_i \Big\|.$$

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *cumplen esta desigualdad, diremos que son* K*-equivalentes.*

Teorema 1.4 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una base de un espacio de Banach* X. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una base incondicional.*

(II) $(x_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ *es una base de* X *para toda permutación* $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$*.*

(III) *Existe una constante* C *tal que, para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*, para toda sucesión de escalares* $(a_n)_{n=1}^{m}$ *y toda sucesión de escalares* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{m}$ *con* $|\varepsilon_n| \leq 1$ *para* $1 \leq n \leq m$*, se tiene la desigualdad*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \Big\|.$$

Una base que satisface la condición (III) para la constante C se llama *C-incondicional*, y si además es subsimétrica se llama *C-subsimétrica.*

El teorema 1.2 nos provee de una manera muy sencilla de construir otras sucesiones básicas a partir de una dada.

Proposición 1.5 *Sean* X *un espacio de Banach y* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión básica en* X *con constante de base* K*. Supongamos que* $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión creciente de enteros con* $m_1 = 0$*,* $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión de escalares y que para toda* $j \in \mathbb{N}$

$$u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i x_i \neq 0.$$

Entonces la sucesión $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica en* X*, llamada* **base bloque** *de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, cuya constante de base es menor o igual a* K*. Un* **subespacio bloque** *es el subespacio cerrado generado por una base bloque.*

El siguiente teorema es muy útil porque en ciertos casos nos permite responder preguntas generales sobre subespacios estudiando solamente los subespacios bloque. Es tan utilizado, que en la literatura muchas veces se le llama “el argumento usual de perturbación”.

Teorema 1.6 *Sean* X *un espacio de Banach con base* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $\varepsilon > 0$*. Entonces, si* F *es un subespacio de dimensión infinita de* X*, existen una base bloque normalizada* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *en* X *y un subespacio de dimensión infinita* G *de* F *que tiene una base normalizada* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$*, tales que* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *son equivalentes.*

1.3. Los espacios de Schlumprecht

En esta sección se muestra la generalización del espacio de Schlumprecht definida en la tesis de licenciatura [9], junto con los resultados probados acerca de ella.

1.3.1. La clase $\mathscr{F}$ y sus propiedades

La definición del espacio de Schlumprecht y las pruebas de varios resultados acerca de espacios de su tipo, se basan en las propiedades de las funciones de una cierta clase, definida por el mismo Schlumprecht.

Definición 1.7 *La clase $\mathscr{F}$ consiste de las funciones $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ que satisfacen:*

(I) $f(1) = 1$ *y* $f(x) < x$ *para toda* $x > 1$.

(II) $f(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$.

(III) $\lim_{x\to\infty} x^{-q} f(x) = 0$ *para toda* $q > 0$.

(IV) *La función* $x/f(x)$ *es cóncava.*

(V) f *es submultiplicativa, es decir,* $f(xy) \leq f(x)f(y)$ *para cualesquiera* $x, y \geq 1$.

(VI) *La derivada por la derecha de* f *en* 1 *es positiva.*

De la definición se siguen los siguientes resultados.

Proposición 1.8 *Sea* $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ *que satisface las condiciones* (I) *a* (V) *de la definición* 1.7*. Entonces* f *y* $x/f(x)$ *son estrictamente crecientes.*

Proposición 1.9 *La función* $\varphi(x) = \log_2(x+1)$ *pertenece a la clase* $\mathscr{F}$.

Proposición 1.10 $\varphi^p \in \mathscr{F}$ *para* $0 < p < 1$.

1.3.2. Construcción de los espacios

En esta sección definiremos una familia de espacios que incluye al espacio construido por Schlumprecht en [26], así como a los que hemos llamado "los espacios de Schlumprecht". Antes de pasar a la definición, iniciemos con un poco de notación.

Definición 1.11 (I) *Sea*

$$c_{00} = \big\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K}\,\forall\, n \in \mathbb{N},\ y\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ tal\ que\ x_n = 0\,\forall\, n \geq N\big\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *sea* $\mathbf{e}_n = (x_n^m)_{m=1}^{\infty} \in c_{00}$ *dado por*

$$x_n^m = \begin{cases} 1 & si\ n = m \\ 0 & si\ n \neq m. \end{cases}$$

(II) *Si* $E \subset \mathbb{N}$, *también utilizaremos la letra* E *para la proyección de* c_{00} *en* c_{00} *definida por* $E(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i\in E} a_i \mathbf{e}_i$ *(esto está bien definido porque cada suma de este tipo tiene solamente un número finito de sumandos distintos de cero, y cada vector tiene una representación única porque los* $\mathbf{e}_i$ *forman una base de Hamel de* c_{00}*).*

(III) *Sean* $E, F \subset \mathbb{N}$. *Si* $E, F \neq \emptyset$, $E < F$ *quiere decir que* $\max E < \min F$.

(IV) *El* **soporte** *de un vector* $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i \in c_{00}$ *es el conjunto* $\operatorname{sop}(x) = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$.

(V) *Un* **intervalo** *de enteros es un subconjunto de* $\mathbb{N}$ *de la forma* $\{i \in \mathbb{N} : a \leq i \leq b\}$ *para algunos* $a, b \in \mathbb{N}$. *Definimos el* **rango** *de un vector* $x \in c_{00}$, *escrito* $\operatorname{ran}(x)$, *como el intervalo más pequeño que contiene a su soporte.*

(VI) *Para $x, y \in c_{00}$, escribiremos $x < y$ para indicar que existen naturales $n_1 \leq m_1 < n_2 \leq m_2$ y escalares $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{m_1}$ y $b_{n_2}, b_{n_2+1}, \ldots, b_{m_2}$ tales que $x = \sum_{i=n_1}^{m_1} a_i \mathbf{e}_i$ y $y = \sum_{i=n_2}^{m_2} b_i \mathbf{e}_i$. Si $x_1, \ldots, x_n \in c_{00}$ y $x_1 < \cdots < x_n$, diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son* **sucesivos**.

Definición 1.12 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Denotaremos por S_f a la completación del espacio c_{00} con la norma $\|\cdot\|$ definida implícitamente por la ecuación*

$$\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup\left\{\frac{1}{f(N)} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ subconjuntos finitos de } \mathbb{N}\right\}. \tag{1.1}$$

para toda $x \in c_{00}$. El espacio construido originalmente por Schlumprecht en [26] es el caso particular de $\varphi(x) = \log_2(x+1)$, al que denotaremos simplemente por $S = S_\varphi$. Llamaremos **espacios de Schlumprecht** *a los espacios $S^p = S_{\varphi^p}$ para $0 < p \leq 1$.*

Aunque $\|\cdot\|$ claramente depende de f, por simplicidad la notación no hace énfasis en ello. Siempre será claro a cuál f nos estamos refiriendo en cada caso. El que (1.1) defina implícitamente una norma quiere decir que existe una única norma sobre c_{00} que satisface (1.1).

Observación 1.13 Observemos que una vez fijado un $x \in c_{00}$, ya no necesitamos considerar el supremo sobre todos los $N \geq 2$, sino solamente algunos. Supongamos que $|\operatorname{sop}(x)| = n$, y sea $N > \max\{n, 2\}$. Entonces, para cualesquiera subconjuntos finitos $E_1 < \cdots < E_N$ de $\mathbb{N}$, a lo más n de las proyecciones $E_i x$ serán distintas de cero. Digamos que las proyecciones distintas de $E_{j_1}x, \ldots, E_{j_k}x$ (con $2 \leq k \leq \max\{n, 2\}$) son todas cero. Luego,

$$\sum_{i=1}^{k} \|E_{j_i} x\| = \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\|,$$

y como f es estrictamente creciente,

$$f(k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \|E_{j_i} x\| > f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\|.$$

Por lo tanto, el supremo sobre $N \geq 2$ y $E_1 < \cdots < E_N$ es el mismo si nos restringimos a $2 \leq N \leq \max\{n, 2\}$ y $E_1 < \cdots < E_N \leq m$, donde $m = \max \operatorname{sop}(x)$. Así, el supremo en realidad es un máximo, puesto que al restringir los valores de N del modo que ya mencionamos, solamente hay un número finito de sumas del tipo requerido.

Observación 1.14 Nótese que, por la manera en la que está definida la norma, para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^m$ y cualquier sucesión de naturales $n_1 < \cdots < n_m$, $\|\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_i\| = \|\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{n_i}\|$.

La sucesión $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^\infty$ resulta tener propiedades interesantes, como lo precisa la siguiente proposición.

Proposición 1.15 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Entonces $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base normalizada y 1-subsimétrica de S_f.*

Observación 1.16 De la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^{\infty}$ se sigue que para $x \in c_{00}$, $N \in \mathbb{N}$ y $E_1 < \cdots < E_N$ subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, si denotamos por E_j' al menor intervalo que contiene a E_j, entonces $\sum_{j=1}^{N} \|E_j x\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|E_j' x\|$. Por lo tanto, si el supremo que define la norma se alcanza con $E_1, \ldots, E_N$, podemos suponer que los E_j's son intervalos. De hecho, se puede definir la norma en el espacio de Schlumprecht pidiendo en la ecuación (1.1) que los E_j's sean intervalos.

1.3.3. Propiedades de los espacios

Ahora enunciamos los resultados más importantes obtenidos en [9].

Teorema 1.17 *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $S^p = S_{\varphi^p}$ es un espacio reflexivo y arbitrariamente distorsionable.*

Observemos que en la proposición 1.17 está incluido el caso particular del espacio de Schlumprecht $S = S_\varphi$. Como la propiedad de ser arbitrariamente distorsionable se preserva bajo isomorfismos, cabe preguntarse si los espacios S^p para $0 < p \leq 1$ son isomorfos, pues entonces no habríamos construido nada nuevo. Este no es el caso.

Teorema 1.18 *Sean $0 < q < p \leq 1$. Entonces S^q y S^p no son isomorfos.*

Así, se obtiene una infinidad de espacios arbitrariamente distorsionables no isomorfos entre sí.

Capítulo 2

Nuevos resultados

Como se mencionó en la introducción, buscamos probar que los espacios generalizados en [9], al igual que el de Schlumprecht, son complementablemente minimales. Comenzamos recordando la definición de este concepto.

Definición 2.1 *Un espacio X es llamado* **minimal** *(una noción debida a H. Rosenthal [25]) si todo subespacio de dimensión infinita de X contiene un subespacio isomorfo a X; y X es llamado* **complementablemente minimal** [7] *si todo subespacio de dimensión infinita de X contiene un subespacio que es isomorfo a X y complementado en X.*

P.G. Casazza y E. Odell [6] mostraron que el espacio de Tsirelson T (ver [27]), como se le describe en [12], no tiene ningún subespacio minimal. Por otro lado, P.G. Casazza, W.B. Johnson y L. Tzafriri [5] probaron que el espacio T^* es minimal pero no complementablemente minimal. Puesto que S es complementablemente minimal, se tiene que o es primo o existe un subespacio complementado X de S que es una solución negativa al problema de Schroeder-Bernstein para espacios de Banach (véase [4] para una discusión detallada de esta pregunta). En [14] y [16] W.T. Gowers y B. Maurey encontraron soluciones negativas al problema de Schroeder-Bernstein para espacios de Banach, pero de acuerdo con G. Androulakis y T. Schlumprecht [2] aún no se sabe si la respuesta también es negativa cuando adicionalmente se requiere que los espacios tengan bases incondicionales.

A lo largo de este capítulo, excepto cuando se indique lo contrario, consideraremos un $0 < p \leq 1$ fijo, y $f = \varphi^p$.

Definición 2.2 *Para $x \in c_{00}$ y $l \in \mathbb{N}$ con $l \geq 2$, definimos*

$$\|x\|_l = \sup\left\{\frac{1}{f(l)}\sum_{i=1}^{l}\|E_i x\| : E_1 < \cdots < E_l \text{ subconjuntos finitos de } \mathbb{N}\right\}.$$

Observación 2.3 Es claro que $\|\cdot\|_l$ es una norma, puesto que $\|\cdot\|$ lo es. Además, de las definiciones de las normas se sigue que para $x \in c_{00}$ y $2 \leq l < \infty$ se tiene $\|x\|_l \leq \|x\|$;

mientras que por otro lado, considerando una sucesión de conjuntos $E_1 < \cdots < E_l$ con $E_1 = \mathrm{ran}(x)$

$$\|x\| = \|E_1 x\| \leq \sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| \leq f(l) \|x\|_l .$$

Por lo tanto, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_l$ son equivalentes, ya que $\frac{1}{f(l)} \|x\| \leq \|x\|_l \leq \|x\|$ para todo $x \in c_{00}$. Además, de la observación 1.13 es claro que $\|x\| = \sup_{2 \leq l \leq \infty} \|x\|_l$.

Definición 2.4 *Para $x \in c_{00}$ y $r \in \mathbb{R}_+$ con $r \geq 2$, definimos*

$$|||x|||_r = \sup \left\{ \|x\|_l : r \leq l, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \right\}$$

Observación 2.5 Por ser un supremo de normas acotadas por la norma $\|\cdot\|$, tenemos que $|||\cdot|||_r$ es una norma. Además, es equivalente a la norma $\|\cdot\|$, puesto que para cualquier $x \in c_{00}$ se tiene que $|||x|||_r \leq \|x\|$ y

$$|||x|||_r \geq \sup \left\{ \|x\|_l : r \leq l, l \in \mathbb{N} \right\} \geq \sup \left\{ \frac{1}{f(l)} \|x\| : r \leq l, l \in \mathbb{N} \right\} = \frac{1}{f(\lceil r \rceil)} \|x\| ,$$

donde $\lceil r \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que r.

Observación 2.6 De manera análoga a la observación 1.13, nótese que los supremos que definen a las normas $\|\cdot\|_l$ y $|||\cdot|||_r$ en realidad son máximos.

2.1. Los espacios de Schlumprecht son complementablemente minimales

La meta principal de esta sección será probar que los espacios S^p son complementablemente minimales. Antes demostraremos algunos resultados similares a los probados en [2], el primero de los cuales usa en su demostración el teorema de Krivine, originalmente probado en [19].

Definición 2.7 *Sean (x_n) una sucesión básica en un espacio de Banach X, y $p \in [1, \infty]$. Decimos que ℓ_p* **es finitamente representable por bloques en** *(x_n) si para toda $m \in \mathbb{N}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión bloque $(y_n)_{n=1}^m$ de (x_n) que es $(1 + \varepsilon)$-equivalente a la base canónica de ℓ_p^m.*

Teorema 2.8 (de Krivine) *Para toda sucesión básica (x_n) en un espacio de Banach X, existe $p \in [1, \infty]$ tal que ℓ_p es finitamente representable por bloques en (x_n).*

Proposición 2.9 *ℓ_1 se representa finitamente por bloques en cada base bloque de $(\mathbf{e}_i)$.*

Demostración. Sea (y_n) una base bloque de $(\mathbf{e}_i)$. Por el teorema de Krivine, existe $p \in [1, \infty]$ tal que ℓ_p se representa finitamente por bloques en (y_n). Por lo tanto, basta probar que ℓ_p, $1 < p \leq \infty$, no es finitamente representable por bloques en (y_n).

Sea $m \in \mathbb{N}$. Veamos que podemos suponer que la sucesión bloque de (y_n) que es equivalente a la base canónica de ℓ_p^m es normalizada. Para $\varepsilon > 0$, sea $(z_i)_{i=1}^m$ una sucesión bloque de (y_n) que es $(1+\varepsilon)$-equivalente a la base canónica de ℓ_p^m. Entonces, $(1+\varepsilon)^{-1} \leq \|z_i\| \leq 1+\varepsilon$ para $1 \leq i \leq m$. Sea $(\alpha_i)_{i=1}^m$ una sucesión de escalares. Por la 1-incondicionalidad de $(\mathbf{e}_n)$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^m \frac{(1+\varepsilon)^{-1}}{\|z_i\|}\alpha_i z_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i\Big\| \qquad \text{y} \qquad \Big\|\sum_{i=1}^m \frac{\|z_i\|}{1+\varepsilon}\frac{\alpha_i}{\|z_i\|} z_i\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\|z_i\|} z_i\Big\|.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{z_i}{\|z_i\|}\Big\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i\Big\| \leq (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{z_i}{\|z_i\|}\Big\|,$$

es decir, $(z_i)_{i=1}^m$ y $(z_i/\|z_i\|)_{i=1}^m$ son $(1+\varepsilon)$-equivalentes, y por lo tanto $(z_i/\|z_i\|)_{i=1}^m$ es $(1+\varepsilon)^2$-equivalente a la base canónica de ℓ_p^m.

Ahora bien, para todo $1 < p \leq \infty$, toda $m \in \mathbb{N}$ y cualquier bloque normalizado $(z_i)_{i=1}^m$ de (y_n) se tiene, de la definición de la norma en S_f,

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{m^{1/p}}\sum_{i=1}^m z_i\Big\| &\geq \frac{1}{m^{1/p}}\frac{1}{f(m)}\sum_{j=1}^m \Big\|(\operatorname{sop}(z_j))\sum_{i=1}^m z_i\Big\| \\ &= \frac{1}{m^{1/p}}\frac{1}{f(m)}\sum_{i=1}^m \|z_i\| = \frac{1}{m^{1/p}}\frac{m}{f(m)} = \frac{m^{1-1/p}}{f(m)}.\end{aligned}$$

Por la propiedad (III) de 1.7, $\frac{m^{1-1/p}}{f(m)} \to \infty$ cuando $m \to \infty$. Por otro lado, si $(z_i)_{i=1}^m$ fuera $(1+\varepsilon)$-equivalente a la base canónica de ℓ_p^m se tendría que

$$\Big\|\frac{1}{m^{1/p}}\sum_{i=1}^m z_i\Big\| \leq (1+\varepsilon)\Big\|\Big(\frac{1}{m^{1/p}}\Big)_{i=1}^m\Big\|_{\ell_p} = 1+\varepsilon.$$

Por lo tanto, ℓ_p con $1 < p \leq \infty$ no es finitamente representable por bloques en (y_n). ■

Lema 2.10 *Sean $\varepsilon > 0$ y $l \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n = n(\varepsilon, l) \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: si $m \geq n$ y $y = m^{-1}\sum_{i=1}^m x_i$, donde $(x_i)_{i=1}^m$ es una base bloque normalizada de $(\mathbf{e}_i)$ que es $(1+\varepsilon/2)$-equivalente a la base canónica de ℓ_1^m, entonces*

$$\sup_{E_1 < \ldots < E_l} \sum_{i=1}^l \|E_i y\| \leq \|y\| + \varepsilon \leq 1+\varepsilon.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $4l/n \leq \varepsilon$ y supongamos que $m \geq n$ y $(x_i)_{i=1}^m$ son como en el enunciado del lema. Además, sean $E_1 < \ldots < E_l$ subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Como $(\mathbf{e}_i)$ es 1-incondicional, podemos suponer que los E_j's son intervalos en $\mathbb{N}$, de la misma manera que en la observación 1.16. Esto implica que para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$ existen a lo más dos elementos $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $E_j \cap \operatorname{sop}(x_{i_s}) \neq \emptyset$, $\operatorname{sop}(x_{i_s}) \setminus E_j \neq \emptyset$, $s = 1, 2$. Para $j = 1, \ldots, l$ sea

$$\tilde{E}_j = \bigcup \big\{ \operatorname{sop}(x_i) : i \leq m \text{ y } \operatorname{sop}(x_i) \subset E_j \big\}.$$

Entonces, si $y = m^{-1} \sum_{i=1}^m x_i$, usando la desigualdad del triángulo y la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_i)$ se tiene que $\big\| E_j y - \tilde{E}_j y \big\| \leq \frac{1}{m} \big[\, \|E_j x_{i_1}\| + \|E_j x_{i_2}\| \, \big] \leq \frac{1}{m} \big[\, \|x_{i_1}\| + \|x_{i_2}\| \, \big] = \frac{2}{m}$. También de la desigualdad del triángulo, $\|y\| \leq m^{-1} \sum_{i=1}^m \|x_i\| = 1$. De lo anterior, la suposición de que $(x_i)_{i=1}^m$ es $(1 + \varepsilon/2)$-equivalente a la base canónica de ℓ_1^m y la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_i)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^l \|E_j y\| &\leq \frac{2l}{m} + \sum_{j=1}^l \big\| \tilde{E}_j y \big\| = \frac{2l}{m} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \Big\| \sum_{\operatorname{sop}(x_i) \subset \tilde{E}_j} x_i \Big\| \leq \frac{2l}{m} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{\operatorname{sop}(x_i) \subset \tilde{E}_j} \|x_i\| \\
&= \frac{2l}{m} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^l \sum_{\operatorname{sop}(x_i) \subset \tilde{E}_j} 1 \leq \frac{2l}{m} + \frac{1 + \varepsilon/2}{m} \Big\| \sum_{j=1}^l \sum_{\operatorname{sop}(x_i) \subset \tilde{E}_j} x_i \Big\| \\
&\leq \frac{2l}{m} + \frac{1}{m} \Big\| \sum_{i=1}^m x_i \Big\| (1 + \varepsilon/2) \leq \varepsilon/2 + \|y\| + \|y\| \, \varepsilon/2 \leq \varepsilon + \|y\| \leq \varepsilon + 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 2.11 *Sea $x \in S_f$. Definimos el* **carácter** *de x, denotado por* $\operatorname{car}(x)$*, por*

$$\operatorname{car}(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } \|x\| = \|x\|_\infty \\ \min\{l \geq 2 : \|x\| = \|x\|_l\} & \text{si } \|x\| \neq \|x\|_\infty \end{cases}$$

Proposición 2.12 *Para $a, b, \nu \geq 1$, $(a + b)^\nu \geq a^\nu + b^\nu$.*

Demostración. Sea $h(a, b) := (a + b)^\nu - a^\nu - b^\nu$. Observemos que $h(1, 1) = 2^\nu - 2 \geq 0$. Ahora, $\frac{d}{da} h(a, 1) = \frac{d}{da} ((a + 1)^\nu - a^\nu - 1) = \nu[(a + 1)^{\nu-1} - a^{\nu-1}] \geq 0$ puesto que como $\nu - 1 \geq 0$, elevar a la $\nu - 1$ es una función creciente. Por lo tanto, $h(a, 1) \geq 0$ para toda $a \geq 1$. Calculamos $\frac{\partial}{\partial b} h(a, b) = \nu[(a + b)^{\nu-1} - b^{\nu-1}] \geq 0$ una vez más porque elevar a la $\nu - 1$ es creciente. Puesto que $h(a, 1) \geq 0$ para toda $a \geq 1$, concluimos que $h(a, b) \geq 1$ para cualesquiera $a, b \geq 1$, de donde se sigue la desigualdad deseada. $\blacksquare$

Proposición 2.13 *Existe una constante $c > 2$ tal que*

$$f(z) - 1 \geq f(z)/c \qquad \text{siempre que } z \geq 2. \tag{2.1}$$

$$c f(z') \geq f(zz') - f(z) \qquad \text{siempre que } z, z' \geq 1. \tag{2.2}$$

$$f\big(z^{1/\sqrt{f(z)}}\big) \leq c f^{1-p/2}(z) \qquad \text{siempre que } z \geq 2. \tag{2.3}$$

$$f(z^\nu) \leq c \nu f(z) \qquad \text{siempre que } z \geq 1 \text{ y } \nu \geq 1. \tag{2.4}$$

Demostración. La primera desigualdad es equivalente a $f(z) \geq 1/(1 - 1/c)$. Como f es creciente, bastará con que $f(2) \geq 1/(1 - 1/c)$. Puesto que $f(2) > f(1) = 1$, siempre se puede escoger c suficientemente grande de modo que esta desigualdad se cumpla.

Sean $z, z' \geq 1$. Observemos que $zz'+1 \leq (z+1)(z'+1)$. Por las propiedades de los logaritmos, $\varphi(zz') = \log_2(zz'+1) \leq \log_2[(z+1)(z'+1)] = \log_2(z+1)+\log_2(z'+1) = \varphi(z)+\varphi(z')$. Como $1/p \geq 1$, de la proposición 2.12 y lo anterior se tiene que $[\varphi^p(z) + \varphi^p(z')]^{1/p} \geq \varphi(z) + \varphi(z') \geq \varphi(zz')$, de donde elevando a la p se obtiene que $f(z) + f(z') \geq f(zz')$, es decir $f(z') \geq f(zz') - f(z)$.

Sea $z \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(z^{1/\sqrt{f(z)}})}{f^{1-p/2}(z)} &= \Big[\frac{\log_2(z^{1/\sqrt{f(z)}}+1)}{\log_2^{1-p/2}(x+1)}\Big]^p \leq \Big[\frac{\log_2(2z^{1/\sqrt{f(z)}})}{\log_2^{1-p/2}(x)}\Big]^p \leq \Big[\frac{\log_2 2 + (1/\sqrt{f(z)})\log_2(x)}{\log_2^{1-p/2}(x)}\Big]^p \\ &\leq \Big[\frac{1}{\log_2^{1-p/2}(x)} + \frac{\log_2(x)}{\log_2^{p/2}(x)\log_2^{1-p/2}(x)}\Big]^p \leq \Big[\frac{1}{\log_2^{1-p/2}(2)}+1\Big]^p = 2^p \leq 2\end{aligned}$$

Sean $z, \nu \geq 1$. Por la proposición 2.12, $z^\nu + 1 \leq (z+1)^\nu$. Tomando el logaritmo base 2, $\varphi(z^\nu) = \log_2(z^\nu+1) \leq \log_2[(z+1)^\nu] = \nu\log_2(z+1) = \nu\varphi(z)$. Elevando a la p, $f(z^\nu) \leq \nu^p f(z) \leq \nu f(z)$.

Así, eligiendo $c > 2$ de modo que $f(2) \geq 1/(1-1/c)$, se cumplen las cuatro desigualdades. ■

Observación 2.14 La constante c podría haber sido sustituida por 1 en las desigualdades (2.2) y (2.4), pero la hemos conservado para mantenerlas iguales a como aparecen en [2].

Lema 2.15 *Existe una constante $d > 1$ tal que para cualquier $r \in \mathbb{R}_+$ con $f^p(r) > d^2$,*

$$|||x|||_r \leq \left[\frac{1}{1-d/\sqrt{f(r)}}\right] \sup_{l\geq r, E_1<\ldots<E_l} \frac{1}{f(l)}\sum_{i=1}^{l} |||E_i x|||_{r^{f(r)}}$$

si $x \in c_{00}$ con $|||x|||_r \neq \|x\|_\infty$.

Demostración. Sea c dada por la proposición 2.13, elijamos $d = 4c^3 > 32$ y sea $r \in \mathbb{R}_+$ con $f^p(r) > d^2$ (de donde $r \geq f(r) \geq f^p(r) > d^2 > 4(2)^3 = 32$). Para probar que esta elección de d funciona, sea $x \in S_f$ con $|||x|||_r \neq \|x\|_\infty$. Por la observación 2.6, existen $\ell \geq r$ y $E_1 < \ldots < E_l$ tales que

$$|||x|||_r = \frac{1}{f(l)}\sum_{i=1}^{l}\|E_i x\|.$$

Para $\tilde{r}, \tilde{R} \in \mathbb{R}$ con $2 \leq \tilde{r} < \tilde{R}$, sea

$$M = M(\tilde{r},\tilde{R}) := \big\{i \leq l : \mathrm{car}(E_i x) \in [\tilde{r},\tilde{R})\big\},$$

y para $i \in M$ sea $l_i \in [\tilde{r}, \tilde{R})$ el carácter de $E_i x$. Para cada $i \in M$, por la observación 1.13 existen subconjuntos finitos $E_1^i < \ldots < E_{l_i}^i$ de E_i de modo que

$$\|E_i x\| = \frac{1}{f(l_i)} \sum_{j=1}^{l_i} \left|\left\|E_j^i x\right|\right\| .$$

Enseguida, observemos que el conjunto $\{E_i : i \notin M\} \cup \bigcup_{i \in M} \{E_j^i : 1 \le j \le l_i\}$ es una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, bien ordenada por $<$, y que su cardinalidad es $l - |M| + \sum_{i \in M} l_i$, que es al menos l y a lo más $l\tilde{R}$. Entonces deducimos, recordando que por la proposición 1.8, f es creciente, y que $l_i \ge \tilde{r}$ para $i \in M$,

$$\begin{aligned}
|\|x\||_r &= \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| \\
&\ge \frac{1}{f(l - |M| + \sum_{i \in M} l_i)} \Big[\sum_{i=1, i \notin M}^{l} \|E_i x\| + \sum_{i \in M} \sum_{j=1}^{l_i} \left\|E_j^i x\right\| \Big] \\
&\ge \frac{1}{f(l\tilde{R})} \Big[\sum_{i=1, i \notin M}^{l} \|E_i x\| + \sum_{i \in M} f(l_i) \, \|E_i x\| \Big] \\
&\ge \frac{1}{f(l\tilde{R})} \Big[\sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| + \sum_{i \in M} (f(\tilde{r}) - 1) \, \|E_i x\| \Big] \\
&\ge \frac{1}{f(l\tilde{R})} \Big[\sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| + \frac{1}{c} f(\tilde{r}) \sum_{i \in M} \|E_i x\| \Big],
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la condición (2.1), que se puede aplicar porque $\tilde{r} \ge 2$.

Despejando $\sum_{i \in M} \|E_i x\|$ y multiplicando por $\frac{1}{f(l)}$ se obtiene, tras simplificar y usar la condición (2.2), así como el que $r \le l$ y f es creciente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(l)} \sum_{i \in M} \|E_i x\| &\le \frac{1}{f(l)} \Big[\frac{1}{f(l)} - \frac{1}{f(l\tilde{R})} \Big] \frac{c f(l\tilde{R})}{f(\tilde{r})} \sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| \\
&= \frac{c}{f(l)} \frac{f(l\tilde{R}) - f(l)}{f(\tilde{r})} \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| \\
&= c \frac{f(l\tilde{R}) - f(l)}{f(\tilde{r}) f(l)} \, |\|x\||_r \\
&\le c^2 \frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r}) f(l)} \, |\|x\||_r \le c^2 \frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r}) f(r)} \, |\|x\||_r .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Por ser $r > 32 > 1$, $f(r) > 1$ y entonces $2 < r^{1/\sqrt{f(r)}} < r < r^{\sqrt{f(r)}} < r^{f(r)}$. Eligiendo para $(\tilde{r}, \tilde{R})$ los valores $(2, r^{1/\sqrt{f(r)}})$, $(r^{1/\sqrt{f(r)}}, r)$, $(r, r^{\sqrt{f(r)}})$ y $(r^{\sqrt{f(r)}}, r^{f(r)})$, usando las propiedades (2.3) y (2.4) en cada caso se obtiene

$$\frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r})f(r)} \le \frac{c}{f^{p/2}(r)}. \tag{2.6}$$

(I) $(\tilde{r},\tilde{R}) = (2, r^{1/\sqrt{f(r)}})$: Por la desigualdad (2.3), $f\big(r^{1/\sqrt{f(r)}}\big) \le cf^{1-p/2}(r)$. Entonces, puesto que $f(2) \ge 1$,

$$\frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r})f(r)} = \frac{f(r^{1/\sqrt{f(r)}})}{f(2)f(r)} \le \frac{f(r^{1/\sqrt{f(r)}})}{f(r)} \le \frac{cf^{1-p/2}(r)}{f(r)} = \frac{c}{f^{p/2}(r)}.$$

(II) $(\tilde{r},\tilde{R}) = (r^{1/\sqrt{f(r)}}, r)$: $f(r) = f\big((r^{1/\sqrt{f(r)}})^{\sqrt{f(r)}}\big) \le c\sqrt{f(r)}f(r^{1/\sqrt{f(r)}})$ por la desigualdad (2.4). Entonces,

$$\frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r})f(r)} = \frac{f(r)}{f(r^{1/\sqrt{f(r)}})f(r)} = \frac{1}{f(r^{1/\sqrt{f(r)}})} \le \frac{c}{\sqrt{f(r)}} \le \frac{c}{f^{p/2}(r)}.$$

(III) $(\tilde{r},\tilde{R}) = (r, r^{\sqrt{f(r)}})$: Por la desigualdad (2.4), $f(r^{\sqrt{f(r)}}) \le c\sqrt{f(r)}f(r)$. Entonces,

$$\frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r})f(r)} = \frac{f(r^{\sqrt{f(r)}})}{f(r)f(r)} \le \frac{cf^{3/2}(r)}{f^2(r)} = \frac{c}{f^{1/2}(r)} \le \frac{c}{f^{p/2}(r)}.$$

(IV) $(\tilde{r},\tilde{R}) = (r^{\sqrt{f(r)}}, r^{f(r)})$: Por la desigualdad (2.4), $f\big((r^{\sqrt{f(r)}})^{\sqrt{f(r)}}\big) \le c\sqrt{f(r)}f(r^{\sqrt{f(r)}})$. Entonces,

$$\frac{f(\tilde{R})}{f(\tilde{r})f(r)} = \frac{f(r^{f(r)})}{f(r^{\sqrt{f(r)}})f(r)} \le \frac{c}{\sqrt{f(r)}} \le \frac{c}{f^{p/2}(r)}.$$

Sumando las cuatro versiones de la desigualdad (2.5) obtenidas con los cuatro valores distintos para $(\tilde{r},\tilde{R})$ y usando (2.6), obtenemos

$$\frac{1}{f(l)} \sum_{2\le \mathrm{car}(E_i x) < r^{f(r)}} \|E_i x\| \le \frac{4c^3}{f^{p/2}(r)} \left|\left|\left|x\right|\right|\right|_r = \frac{d}{f^{p/2}(r)} \left|\left|\left|x\right|\right|\right|_r. \tag{2.7}$$

Ahora bien, si $i \in \{1,\dots,l\}$ es tal que $\mathrm{car}(E_i x) \ge r^{f(r)}$, entonces

$$\left|\left|\left|E_i x\right|\right|\right|_{r^{f(r)}} = \sup_{\substack{s\ge r^{f(r)}\\ s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}} \|E_i x\|_s \ge \|E_i x\|_{\mathrm{car}\, E_i x} = \|E_i x\|. \tag{2.8}$$

Por lo tanto, usando (2.7) y (2.8),

$$
\begin{aligned}
|||x|||_r &= \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^{l} \|E_i x\| \\
&= \frac{1}{f(l)} \sum_{2 \leq \operatorname{car}(E_i x) < r^{f(r)}} \|E_i x\| + \frac{1}{f(l)} \sum_{\operatorname{car}(E_i x) \geq r^{f(r)}} \|E_i x\| \\
&\leq \frac{d}{f^{p/2}(r)} \, |||x|||_r + \frac{1}{f(l)} \sum_{\operatorname{car}(E_i x) \geq r^{f(r)}} |||E_i x|||_{r^{f(r)}} \\
&\leq \frac{d}{f^{p/2}(r)} \, |||x|||_r + \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^{l} |||E_i x|||_{r^{f(r)}} \,,
\end{aligned}
$$

de donde al despejar $|||x|||_r$ se obtiene, puesto que $1 - d/f^{p/2}(r) > 0$ (ya que $f^p(r) > d^2$),

$$
|||x|||_r \leq \left[\frac{1}{1 - d/f^{p/2}(r)} \right] \frac{1}{f(l)} \sum_{i=1}^{l} |||E_i x|||_{r^{f(r)}}
$$

de donde se sigue el lema. ∎

El siguiente teorema esencialmente prueba que S_f es minimal, pero antes probaremos algunos lemas técnicos.

Lema 2.16 *Sea $d \geq 1$ como en el lema 2.15. Para $r \geq 1$ definimos $r_0 := r$, y recursivamente $r_{k+1} = r_k^{f(r_k)}$. Entonces existe $R > 2$ tal que*

$$
\beta(r) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - d/f^{p/2}(r_k)} \right] \frac{f(9r_k)}{f(r_k)}
$$

es finito siempre que $r \geq R$.

Demostración. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, existe $R > 2$ tal que $f(R) \geq 2$, $f^p(R) > d^2$ y $f^{p/2}(R) > 2d$. Observemos que (r_k) es creciente pues $f \geq 1$, y además por inducción se tiene inmediatamente que $r_k \geq r^{2^k}$. Probaremos separadamente la convergencia de los productos

$$
\beta_1(r) := \prod_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - d/f^{p/2}(r_k)} \right] \qquad\qquad \beta_2(r) := \prod_{k=0}^{\infty} \frac{f(9r_k)}{f(r_k)},
$$

de donde se seguirá el resultado deseado.

La convergencia de β_2 es consecuencia de la convergencia de la serie

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left(\frac{f(9r_k)}{f(r_k)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \big[\ln f(9r_k) - \ln f(r_k) \big]. \tag{2.9}
$$

Observemos que de la demostración de la proposición 2.13, $f(9r_k) \leq f(9) + f(r_k)$. Por lo tanto, ya que el logaritmo es creciente, $\ln f(9r_k) - \ln f(r_k) \leq \ln\big(f(9) + f(r_k)\big) - \ln f(r_k)$. Por el teorema del valor medio, existe $\xi \in [f(r_k), f(9) + f(r_k)]$ tal que

$$\begin{aligned}\ln\big(f(9) + f(r_k)\big) - \ln f(r_k) &= \frac{1}{\xi}\big(f(9) + f(r_k) - f(r_k)\big) = \frac{f(9)}{\xi} \leq \frac{f(9)}{f(r_k)} \leq \frac{f(9)}{\log_2^p(r_k)}\\ &\leq \frac{f(9)}{\log_2^p(r^{2^k})} = \frac{f(9)}{[2^k \log_2(r)]^p} = \frac{f(9)}{\log_2^p(r)}\Big(\frac{1}{2^p}\Big)^k\end{aligned}$$

y entonces, por comparación con la serie geométrica, la serie (2.9) converge.

Por otro lado, la convergencia de β_1 se sigue de la convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left[\frac{1}{1 - d/f^{p/2}(r_k)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\big[\ln(f^{p/2}(r_k)) - \ln\big(f^{p/2}(r_k) - d\big)\big]. \tag{2.10}$$

Una vez más por el teorema del valor intermedio, existe $\xi \in [f^{p/2}(r_k) - d, f^{p/2}(r_k)]$ tal que

$$\begin{aligned}\ln(f^{p/2}(r_k)) - \ln\big(f^{p/2}(r_k) - d\big) &= \frac{d}{\xi} \leq \frac{d}{f^{p/2}(r_k) - d} \leq \frac{d}{f^{p/2}(r_k)/2}\\ &= \frac{2d}{\log_2^{p^2/2}(r^{2^k})} = \frac{2d}{\log_2^{p^2/2}(r)}\Big(\frac{1}{2^{p^2/2}}\Big)^k,\end{aligned}$$

y entonces la serie (2.10) converge por comparación con la serie geométrica. ■

Lema 2.17 *Si $k \geq 1$, $g(x) = \varphi(kx)/\varphi(x)$ es una función decreciente de x en $\in [1, \infty)$.*

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\varphi(kx)}{\varphi(x)} = \frac{d}{dx}\frac{\ln(kx+1)}{\ln(x+1)} = \ln^{-2}(x+1)\Big[\frac{k}{kx+1}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\ln(kx+1)\Big]\\ &= \frac{\ln^{-2}(x+1)}{(x+1)(kx+1)}\big[k(x+1)\ln(x+1) - (kx+1)\ln(kx+1)\big]\\ &= \frac{k\ln^{-2}(x+1)}{(x+1)(kx+1)}\big[(x+1)\ln(x+1) - (x+1/k)\ln(kx+1)\big].\end{aligned}$$

Ahora, para $x \geq 1$ fija sea $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(k) = (x + 1/k)\ln(kx+1)$. Calculamos

$$h'(k) = (x + 1/k)\frac{x}{kx+1} + (-1/k^2)\ln(kx+1) = \frac{1}{k^2}\big[kx - \ln(kx+1)\big].$$

De la expansión en serie de Taylor para la exponencial se sigue que para $z \geq 0$, $e^z \geq 1 + z$, de donde $z \geq \ln(z+1)$. Por lo tanto, $h' \geq 0$, y entonces h es creciente, de donde se sigue que $g' \leq 0$ y por lo tanto g es decreciente. ■

Lema 2.18 *Toda base bloque normalizada (y_n) de $(\mathbf{e}_n)$ domina a $(\mathbf{e}_n)$, es decir, para cualquier $(\alpha_n) \in c_{00}$ se tiene que $\|\sum \alpha_n y_n\| \geq \|\sum \alpha_n \mathbf{e}_n\|$.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre m que para cualesquiera (y_n) base bloque normalizada de $(\mathbf{e}_n)$ y $(\alpha_n) \in c_{00}$, $\|\sum_{n=1}^m \alpha_n y_n\| \geq \|\sum_{n=1}^m \alpha_n \mathbf{e}_n\|$.

Para $m = 1$ el resultado es inmediato, puesto que $\|\alpha_1 y_1\| = |\alpha_1| \, \|y_1\| = |\alpha_1| = |\alpha_1| \, \|\mathbf{e}_1\| = \|\alpha_1 \mathbf{e}_1\|$. Supongamos ahora que el resultado es cierto para todos los naturales menores que una $m > 1$. Sean $y = \sum_{n=1}^m \alpha_n y_n$ y $x = \sum_{n=1}^m \alpha_n \mathbf{e}_n$. Por la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_n)$ (ver condición (III) del teorema 1.4), $\|y\| \geq \|\alpha_n y_n\| = |\alpha_n|$ para $1 \leq n \leq m$, de donde $\|y\| \geq \max_{1\leq n\leq m} |\alpha_n| = \|x\|_\infty$. Si $\|x\| = \|x\|_\infty$, hemos terminado. Si no, entonces existen $l \geq 2$ y $E_1 < \ldots < E_l$ subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ tales que $\|x\| = f^{-1}(l) \sum_{j=1}^l \|E_j x\|$. Observemos que $E_j x \neq 0$ para $1 \leq j \leq l$, y por lo tanto $|\operatorname{sop}(E_j x)| < m$. Para $1 \leq j \leq l$, sea $E_j' = \bigcup_{n \in E_j} \operatorname{sop}(y_n)$. Por la hipótesis inductiva y la observación 1.14, $\left\|E_j' y\right\| \geq \|E_j x\|$. Por lo tanto,

$$\|y\| \geq \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l \left\|E_j' y\right\| \geq \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^l \|E_j x\| = \|x\| ,$$

con lo que finaliza la prueba. ∎

Teorema 2.19 *Sea $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ con $\sum \varepsilon_n < \infty$ y sea (y_n) una base bloque normalizada de $(\mathbf{e}_i)$ con las siguientes propiedades: existe una sucesión $k_n \uparrow \infty$ en $\mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{k \leq k_{n-1}, E_1 < \ldots < E_k} \sum_{i=1}^k \|E_i y_n\| \leq 1 + \varepsilon_n, \tag{2.11}$$

$$\max \operatorname{sop}(y_n) \leq \varepsilon_n f(k_n/3). \tag{2.12}$$

Entonces (y_n) es equivalente a $(\mathbf{e}_n)$.

Demostración. Sean r, (r_n) como en el lema 2.16. Mostraremos por inducción sobre m que para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $(\alpha_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$,

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \Big|\Big|\Big|_r \leq \beta(r) \max_{i_0 \geq 1} \Big[|\alpha_{i_0}| + \Big\| \sum_{i > i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \, \varepsilon_i \Big]. \tag{2.13}$$

Observemos que para $i_0 \geq 1$, por la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_i)$ se tiene que $\big\| \sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \big\| \leq \big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \big\|$. Por lo tanto, si $\varepsilon = \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \infty$ entonces

$$|\alpha_{i_0}| + \Big\| \sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \, \varepsilon_i \leq \max_{1\leq i\leq m} |\alpha_i| + \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \varepsilon \max_{1\leq i\leq m} |\alpha_i| \leq (2+\varepsilon) \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\|,$$

puesto que $\big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \big\| \geq \big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \big\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} |\alpha_i|$. Así pues, una vez que se haya probado el resultado inductivo, por el lema 2.18 y la observación 2.5 se tendrá

$$\frac{1}{f(\lceil r \rceil)} \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| \leq \frac{1}{f(\lceil r \rceil)} \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \Big\| \leq \Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \Big|\Big|\Big|_r \leq \beta(r)(2+\varepsilon) \Big\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\|$$

lo que probará el teorema.

Para $m = 1$ la afirmación es trivial, puesto que $\beta(r) \geq 1$ y $|||y_1|||_r \leq \|y_1\| = 1$. Supongamos que es cierto para todos los enteros positivos menores que un cierto $m > 1$, y sean $r \geq R$ y $(\alpha_i)_{i=1}^m \in c_{00}$. Definimos $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$. Si $|||y|||_r = \|y\|_\infty$, la afirmación se sigue fácilmente de que $\|y\|_\infty \leq \text{máx}_{i \leq m} |\alpha_i|$. Si $|||y|||_r \neq \|y\|_\infty$, podemos usar el lema 2.15 para encontrar una $l \geq r$ y subconjuntos finitos $E_1 < \ldots < E_l$ de $\mathbb{N}$ tales que (con $\gamma(r) = 1/(1-d/f^{p/2}(r))$)

$$|||y|||_r \leq \gamma(r) \frac{1}{f(l)} \sum_{j=1}^{l} |||E_j y|||_{r^{f(r)}} . \tag{2.14}$$

Claramente, podemos suponer que para todo $j \leq l$, $E_j \subset \bigcup_{i=1}^m \text{sop}(y_i)$. Para $j = 1, \ldots, l$ definimos

$$s(j) = \text{mín}\left\{i : E_j \cap \text{sop}(y_i) \neq \emptyset\right\}, \quad t(j) = \text{máx}\left\{i : E_j \cap \text{sop}(y_i) \neq \emptyset\right\}$$
$$E_j^1 = E_j \cap \text{sop}(y_{s(j)}), \qquad E_j^2 = E_j \cap \text{sop}(y_{t(j)}) \quad \text{y} \quad E_j^3 = E_j \setminus (E_j^1 \cup E_j^2).$$

Sea $\tilde{\mathcal{E}} = \{E_j^1, E_j^2, E_j^3 : j \leq l\} \setminus \{\emptyset\}$, y notemos que $\tilde{\mathcal{E}}$ puede ser ordenado como $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_{\tilde{l}}\}$ con $l \leq \tilde{l} \leq 3l$ y $\tilde{E}_1 < \ldots < \tilde{E}_{\tilde{l}}$.

Además, observemos que $\tilde{\mathcal{E}}$ puede ser particionado en $m+1$ conjuntos $\tilde{\mathcal{E}}_0, \tilde{\mathcal{E}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{E}}_m$ definidos de la siguiente manera: sea $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \{E \in \tilde{\mathcal{E}} : E \text{ encaja con } (\text{sop}(y_i))_{i \in \mathbb{N}}\}$ (decimos que E ***encaja*** con una sucesión (A_n) de subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$, si para todo $n \in \mathbb{N}$, $E \cap A_n \neq \emptyset$ implica que $A_n \subset E$), y para $1 \leq i \leq m$ definimos $\tilde{\mathcal{E}}_i = \{E \in \tilde{\mathcal{E}} : E \text{ es subconjunto propio de } \text{sop}(y_i)\}$. Para $i = 1, \ldots, m$ definimos $l_i = |\tilde{\mathcal{E}}_i|$ (nótese que $\tilde{\mathcal{E}}_i$ puede ser vacío) y hacemos $i_0 = 1$ si $l_i \leq k_{i-1}$ para todo $i \leq m$, en caso contrario hacemos $i_0 = \text{máx}\{i \leq m : l_i > k_{i-1}\}$.

Recordando que $r_1 = r^{f(r)}$, de (2.14) deducimos, usando la desigualdad del triángulo y que $|||\cdot|||_s \leq \|\cdot\|$ para toda $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
|||y|||_r &\leq \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left|\left|\left|\tilde{E}_j y\right|\right|\right|_{r_1} \\
&\leq \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left[\left|\left|\left|\tilde{E}_j\Big(\sum_{i<i_0} \alpha_i y_i\Big)\right|\right|\right|_{r_1} + |||\tilde{E}_j(\alpha_{i_0} y_{i_0})|||_{r_1} + \left|\left|\left|\tilde{E}_j\Big(\sum_{i>i_0} \alpha_i y_i\Big)\right|\right|\right|_{r_1}\right] \\
&\leq \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i<i_0} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} |\alpha_i| \cdot \left\|\tilde{E}_j y_i\right\| + \frac{\gamma(r) f(\tilde{l})}{f(l)} \frac{|\alpha_{i_0}|}{f(\tilde{l})} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left\|\tilde{E}_j y_{i_0}\right\| \\
&\quad + \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_i} \|E y_i\| + \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} \left|\left|\left|E\Big(\sum_{i>i_0} \alpha_i y_i\Big)\right|\right|\right|_{r_1}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Si $i_0 \neq 1$, el primer término de la suma anterior puede ser estimado como sigue. Por la 1-incondicionalidad de la base $(\mathbf{e}_n)$, $\left\|\tilde{E}_j y_i\right\| \leq \|y_i\| = 1$ para $1 \leq j \leq \tilde{l}$. Como a lo más

$|\operatorname{sop}(y_i)|$ de los términos $\tilde{E}_j y_i$ son distintos de cero, se tiene que $\sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|\tilde{E}_j y_i\| \leq |\operatorname{sop}(y_i)|$. Luego, usando la condición (2.12) del enunciado del teorema y notando que, por la elección de i_0, $l \geq \tilde{l}/3 \geq l_{i_0}/3 \geq k_{i_0-1}/3 \geq k_i/3$ para $i < i_0$, y que f es creciente:

$$\frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i<i_0} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} |\alpha_i| \cdot \|\tilde{E}_j y_i\| \leq \frac{\gamma(r)}{f(k_i/3)} \sum_{i<i_0} |\alpha_i| \cdot |\operatorname{sop}(y_i)| \leq \gamma(r) \sum_{i=1}^{i_0-1} \varepsilon_i |\alpha_i| .$$

El segundo término puede ser estimado como sigue, usando que $\tilde{l} \leq 3l$, f es creciente, la definición de la norma $\|\cdot\|$, que $\|y_{i_0}\| = 1$ y el lema 2.17 :

$$\frac{\gamma(r) f(\tilde{l})}{f(l)} \frac{|\alpha_{i_0}|}{f(\tilde{l})} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \|\tilde{E}_j y_{i_0}\| \leq \frac{\gamma(r) f(3l)}{f(l)} |\alpha_{i_0}| \cdot \|y_{i_0}\| \leq \frac{\gamma(r) f(3r)}{f(r)} |\alpha_{i_0}| .$$

Observemos que por la condición (2.12) del enunciado del teorema y la definición de i_0, si $i > i_0$ y $\tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset$, entonces $l_i \leq k_{i-1}$ y por lo tanto $\sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_i} \|E y_i\| \leq 1 + \varepsilon_i$. Así, el tercer término se acota por

$$\frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_i} \|E y_i\| \leq \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| (1 + \varepsilon_i).$$

Para el cuarto término, consideremos $E \in \tilde{\mathcal{E}}_0$. Como E encaja con la sucesión de los soportes de las (y_i), entonces se tiene que

$$E\Big(\sum_{i>i_0} \alpha_i y_i\Big) = \sum_{\substack{i>i_0 \\ \operatorname{sop}(y_i) \subset E}} \alpha_i y_i.$$

Observemos que como $i_0 \geq 1$, entonces $|\{i > i_0 : \operatorname{sop}(y_i) \subset E\}| < m$. Así, aplicamos la hipótesis inductiva y encontramos para cada $E \in \tilde{\mathcal{E}}_0$ un $i_E \in \{i > i_0 : \operatorname{sop}(y_i) \subset E\} \cup \{0\}$ tal que (con la convención $\alpha_0 = 0$)

$$\sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} \Big|\Big|\Big| E\Big(\sum_{i>i_0} \alpha_i y_i\Big) \Big|\Big|\Big|_{r_1} \leq \beta(r_1) \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} \Big[|\alpha_{i_E}| + \Big\| \sum_{\substack{i>i_E \\ \operatorname{sop}(y_i) \subset E}} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{\substack{i>i_0 \\ \operatorname{sop}(y_i) \subset E}} |\alpha_i| \varepsilon_i \Big].$$

Sea $\mathcal{A} = \big\{\{i\} : i > i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset\big\} \cup \big\{\{i_E\} : E \in \tilde{\mathcal{E}}_0\big\} \cup \big\{\{i > i_E : \operatorname{sop}(y_i) \subset E\} : E \in \tilde{\mathcal{E}}_0\big\}$. Observemos que $\mathcal{A}$ consiste de subconjuntos de $\{i_0 + 1, i_0 + 2, \dots\}$, tiene a lo más $3\tilde{l} \leq 9l$ elementos, y está bien ordenado por $<$.

De (2.15) y las estimaciones mencionadas se tiene que

$$
\begin{aligned}
|||y|||_r \leq \gamma(r) \sum_{i=1}^{i_0-1} \varepsilon_i |\alpha_i| &+ \frac{\gamma(r) f(3r)}{f(r)} |\alpha_{i_0}| + \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| \\
&+ \frac{\gamma(r)}{f(l)} \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| \varepsilon_i + \frac{\gamma(r)\beta(r_1)}{f(l)} \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} |\alpha_{i_E}| \\
&+ \frac{\gamma(r)\beta(r_1)}{f(l)} \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} \Big\| \sum_{\substack{i>i_E \\ \mathrm{sop}(y_i) \subset E}} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \frac{\gamma(r)\beta(r_1)}{f(l)} \sum_{\substack{i>i_0 \\ \mathrm{sop}(y_i) \subset E}} |\alpha_i| \varepsilon_i \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Observemos que $\beta(r) = \beta(r_1)\gamma(r) f(9r)/f(r)$. Por ser f creciente y mayor o igual que 1, y dado que $l \geq r$ y $\beta \geq 1$, $\beta(r) \geq \beta(r_1)\gamma(r)/f(l) \geq \gamma(r)/f(l) \geq \gamma(r)$, y $\beta(r) \geq \gamma(r) f(3r)/f(r)$. Por lo tanto, de (2.16) obtenemos

$$
\begin{aligned}
|||y|||_r \leq \beta(r) \Bigg[|\alpha_{i_0}| &+ \Big(\sum_{i=1}^{i_0-1} \varepsilon_i |\alpha_i| + \sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| \varepsilon_i + \sum_{i>i_0, \mathrm{sop}(y_i) \subset E} |\alpha_i| \varepsilon_i \Big) \\
&+ \frac{f(r)}{f(l) f(9r)} \Big(\sum_{i>i_0, \tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset} |\alpha_i| + \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} |\alpha_{i_E}| + \sum_{E \in \tilde{\mathcal{E}}_0} \Big\| \sum_{i>i_E, \mathrm{sop}(y_i) \subset E} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| \Big) \Bigg]
\end{aligned}
$$

La suma de los términos en el primer paréntesis es menor que $\sum_{i=1}^{i_0-1} \varepsilon_i |\alpha_i|$, puesto que si $\tilde{\mathcal{E}}_i \neq \emptyset$ entonces $\mathrm{sop}(y_i) \not\subset E$ para cualquier $E \in \tilde{\mathcal{E}}$. De la definición de $\mathcal{A}$ se sigue que la suma de los términos en el segundo paréntesis es precisamente $\sum_{A \in \mathcal{A}} \big\| A\big(\sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \big) \big\|$. Por lo tanto,

$$
|||y|||_r \leq \beta(r) \Big[|\alpha_{i_0}| + \frac{f(r)}{f(l) f(9r)} \sum_{A \in \mathcal{A}} \Big\| A\Big(\sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big) \Big\| + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha_i \Big].
$$

Puesto que $|\mathcal{A}| \leq 9l$, $l \geq r$ y usando el lema 2.17, obtenemos

$$
\begin{aligned}
|||y|||_r &\leq \beta(r) \Big[|\alpha_{i_0}| + \frac{f(r) f(|\mathcal{A}|)}{f(l) f(9r)} \Big\| \sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha_i \Big] \\
&\leq \beta(r) \Big[|\alpha_{i_0}| + \frac{f(r) f(9l)}{f(l) f(9r)} \Big\| \sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha_i \Big] \\
&\leq \beta(r) \Big[|\alpha_{i_0}| + \Big\| \sum_{i>i_0} \alpha_i \mathbf{e}_i \Big\| + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha_i \Big]
\end{aligned}
$$

Esto prueba el paso inductivo, con lo que finaliza la demostración del teorema. ■

La siguiente proposición (debida a P.G. Casazza) está enunciada y probada en [2] con suficiente generalidad como para nuestros propósitos, por lo que no ha sido necesario adaptarla.

Proposición 2.20 *Sea Z un espacio de Banach con una base c_u-incondicional (e_n), con $c_u \geq 1$. Supongamos además que existe $c_d > 0$ tal que (e_n) es c_d-dominada por toda base bloque normalizada (y_n) de (e_n) (i.e. $c_d \|\sum \alpha_i y_i\| \geq \|\sum \alpha_i e_i\|$ para cualquier $(\alpha_i) \in c_{00}$). Entonces un subespacio de Z generado por una base bloque normalizada de (e_n) que es equivalente a (e_n), es complementado en Z.*

A partir de todo lo anterior ya no es difícil probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.21 *S_f es complementablemente minimal.*

Demostración. Mediante el argumento usual de perturbación (i.e. la aplicación del teorema 1.6), bastará probar que toda base bloque (z_n) de $(\mathbf{e}_n)$ tiene a su vez una base bloque que es equivalente a $(\mathbf{e}_n)$. Haciendo por ejemplo $\varepsilon_i = 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, buscamos una base bloque normalizada (y_n) de (z_n) y una sucesión (k_n) en $\mathbb{N}$ de tal forma que se satisfagan (2.11) y (2.12) del teorema 2.19. Esto lo haremos por inducción.

Sea $k_0 = 1$ y supongamos que $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$ y $y_1 < \ldots < y_n$ ya han sido definidos para alguna $n \geq 0$. Por la proposición 2.9 y el lema 2.10 podemos escoger $y_{n+1} > y_n$ en el subespacio generado por (z_i) de tal modo que se cumpla la condición (2.11) del teorema 2.19. Como $\lim_{i\to\infty} f(i) = \infty$, podemos elegir k_{n+1} de modo que se cumpla (2.12). Por lo tanto, por el teorema 2.19, (y_n) es equivalente a $(\mathbf{e}_n)$.

El resultado deseado se sigue del lema 2.18 y la proposición 2.20. ■

2.2. Trabajo a futuro

Hasta ahora hemos probado, siguiendo de cerca los argumentos usados en la primera mitad de [2], que los espacios que hemos llamado de Schlumprecht son complementablemente minimales. En la segunda mitad de [2], usando técnicas muy similares a las de la primera mitad (los mismos autores hacen notar la similitud entre algunas de las demostraciones), se prueba que el espacio de Schlumprecht S es subsecuencialmente primo. Por lo tanto, no es descabellado esperar que la demostración se pueda ajustar para probar que los espacios generalizados con los que hemos estado trabajando también son subsecuencialmente primos.

Bibliografía

[1] G. Androulakis and Thomas Schlumprecht. On the subsymetric sequences in S. Preprint.

[2] G. Androulakis and Thomas Schlumprecht. The Banach space S is complementably minimal and subsequentially prime. *Studia Mathematica*, 156:227–242, 2003.

[3] Stefan Banach. *Théorie des Opérations Linéaires*. Monografje Matematyczne, Varsovia, 1932.

[4] Peter George Casazza. The Schroeder-Bernstein property for Banach spaces. In Amer. Math. Soc., editor, *Banach space theory*, pages 61–77, 1989.

[5] Peter George Casazza, W. B. Johnson, and Lior Tzafriri. On Tsirelson's space. *Israel J. Math.*, 17:191–218, 1984.

[6] Peter George Casazza and Edward Odell. Tsirelson's space and minimal subspaces. Texas Functional Analysis Seminar 1982-1983, Longhorn Notes, University of Texas, 1983.

[7] Peter George Casazza and Thaddeus J. Shura. *Tsirelson's space*, volume 1363 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1988.

[8] P.G. Casazza, N.J. Kalton, D. Kutzarova, and M. Mastyło. Complex interpolation and complementably minimal spaces. In *Interaction between functional analysis, harmonic analysis and probability*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Dekker, NY.

[9] Javier Alejandro Chávez Domínguez. Construcción de una infinidad de espacios arbitrariamente distorsionables no isomorfos entre sí. Tesis de licenciatura. Universidad de Guanajuato, 2004.

[10] Per Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[11] Helga Fetter Nathansky and Berta Gamboa de Buen. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo editorial Iberoamérica, México, D.F., 2002.

[12] T. Figiel and W. B. Johnson. A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p. *Compositio Math.*, 29:179–190, 1974.

[13] William Timothy Gowers. A solution to Banach's hyperplane problem. *Bull. London Math. Soc.*, 26:523–530, 1994.

[14] William Timothy Gowers. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces. *Bull. London Math. Soc.*, 28:297–304, 1996.

[15] William Timothy Gowers and Bernard Maurey. The unconditional basic sequence problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 6:851–874, 1993.

[16] William Timothy Gowers and Bernard Maurey. Banach spaces with small spaces of operators. *Math. Ann.*, 307:543–568, 1997.

[17] R. Haydon, Edward Odell, Haskell P. Rosenthal, and Thomas Schlumprecht. On distorted norms in Banach spaces and the existence of ℓ_p types. Preprint.

[18] Robert C. James. Uniformly non-square Banach spaces. *Ann. of Math.*, 80:542–550, 1964.

[19] J.L. Krivine. Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés. *Ann. of Math.*, 104:1–29, 1976.

[20] Denka Kutzarova and Pei-Kee Lin. Remarks about Schlumprecht space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128:2059–2068, 2000.

[21] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: sequence spaces*, volume 92 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[22] Robert Eugene Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, Nueva York, 1998.

[23] V. D. Milman. Geometric theory of Banach spaces II, geometry of the unit sphere. *Russian Math. Survey*, 26:79–163, 1971.

[24] Edward Odell and Thomas Schlumprecht. The distortion problem. *Acta Math.*, 173:259–281, 1994.

[25] H. Rosenthal. On a theorem of Krivine concerning block finite representability of ℓ_p in general Banach spaces. *J. Func. Anal.*, 28:197–225, 1978.

[26] Thomas Schlumprecht. An arbitrarily distortable Banach space. *Israel J. Math.*, 76:81–95, 1991.

[27] Boris S. Tsirelson. Not every Banach space contains ℓ_p or c_0. *Funct. Anal. Appl.*, 8:138–141, 1974.