UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CONSTRUCCIÓN DE UNA INFINIDAD DE ESPACIOS ARBITRARIAMENTE DISTORSIONABLES NO ISOMORFOS ENTRE SÍ.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS.

P R E S E N T A:

JAVIER ALEJANDRO CHÁVEZ DOMÍNGUEZ.

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. BERTA GAMBOA DE BUEN.

JUNIO DE 2004 GUANAJUATO, GUANAJUATO, MÉXICO.

A mi tía Elsa.

Agradecimientos

A mi familia, en particular a mis padres que siempre han apoyado mis decisiones aunque éstas no siempre han sido las que ellos preferirían.

A mis amigos, que hicieron más llevaderos estos cinco años de la licenciatura, especialmente a Rubén, Minerva, Nelly y Areli.

A toda la gente que a lo largo de 18 años ha hecho posible la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, permitiendo que jóvenes como yo conozcan el lado amable de las matemáticas, sobre todo a Rosa Ponce, Pablo Macías, César Pérez, Ignacio Barradas, María Luisa Pérez y Omar Antolín.

A mis profesores de la licenciatura por todo lo que me enseñaron, tanto de matemáticas como de otras cosas, en particular a mi asesora de tesis, Berta Gamboa, quien me introdujo al mundo del análisis matemático.

Finalmente, a las instituciones que me apoyaron con becas para mis estudios de licenciatura: el Centro de Investigación en Matemáticas A.C., la Fundación Telmex, el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y la Universidad de Guanajuato.

Contenido

Introducción

En la teoría de geometría de espacios de Banach, es de interés saber cómo son y cómo están relacionados los subespacios cerrados de un espacio de Banach dado. Algunos de los ejemplos más conocidos y estudiados de espacios de Banach son los espacios c_0 y ℓ_p, por lo que resulta pertinente preguntarse si todo espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a alguno de estos espacios. Este problema, propuesto desde los treintas, estuvo abierto durante largo tiempo. No fue sino hasta 1974 que Boris S. Tsirelson [27] sorprendió a los especialistas al construir un ejemplo relativamente simple de un espacio de Banach que no contiene a c_0 ni a ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, resolviendo el problema.

Otro problema, relacionado con el anterior, es el siguiente. Si un espacio de Banach contiene un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_p, ¿contendrá copias casi isométricas de éste? Es decir: Sea X el espacio c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$, con su norma usual $\|\cdot\|$. Sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente en X. Dado $\varepsilon > 0$, ¿existe un subespacio Y de X tal que existe un isomorfismo $T : (Y, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ con $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < 1 + \varepsilon$? Robert C. James [16] probó que la respuesta es afirmativa en los casos de c_0 y ℓ_1.

Este último problema está fuertemente relacionado con el concepto de espacio distorsionable. Dada $\lambda > 1$, se dice que un espacio normado $(Y, \|\cdot\|)$ es λ-*distorsionable* si existe una norma $|||\cdot|||$ en Y equivalente a $\|\cdot\|$ tal que para todo subespacio $Z \subset Y$

$$\sup \left\{ \frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z, \|z_1\| = \|z_2\| = 1 \right\} \geq \lambda.$$

Un espacio es *distorsionable* si es λ-distorsionable para algún $\lambda > 1$, y es *arbitrariamente distorsionable* si es λ-distorsionable para toda $\lambda > 1$. En este lenguaje, lo que James probó es que c_0 y ℓ_1 no son distorsionables.

Este concepto dio lugar al problema de la distorsión en general: ¿contiene un X dado un subespacio distorsionable? V. D. Milman [20] probó que si X no tiene ningún subespacio distorsionable entonces X contiene una copia casi isométrica de c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$, y preguntó si existen espacios distorsionables. Unos cuantos años después Tsirelson [27] produjo su ya mencionado ejemplo que no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, con lo que probó la existencia de un espacio de Banach distorsionable. Sin embargo, el trabajo de Milman contiene implícitamente el resultado, redescubierto en [15], que si X no contiene a c_0 o ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ entonces algún subespacio de X es distorsionable. Entonces, para resolver el problema de la distorsión en general basta considerar el caso ℓ_p, $1 < p < \infty$, lo que se conoce como “el problema de la distorsión”.

Aunque de los trabajos de Milman y Tsirelson se sigue la existencia de un espacio distorsionable, aún faltaba por saber si existe o no un espacio arbitrariamente distorsionable. Basado en el ejemplo de Tsirelson, en 1991 T. Schlumprecht respondió afirmativamente a la pregunta [24].

En [13], W.T. Gowers y B. Maurey mostraron que el concepto de distorsión también está relacionado con otro famoso problema, el de la sucesión básica incondicional. Si X es un espacio de Banach, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ es una base de Schauder (o simplemente una base) de X si toda $x \in X$ puede ser escrita de manera única como una serie convergente en norma de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Esta definición claramente depende del orden de los x_n, y ciertamente es posible que una permutación de una base no sea una base. Por otro lado, muchas bases que se encuentran naturalmente, como las bases estándar de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, son bases bajo cualquier permutación. Por lo tanto es natural dar un nombre a este tipo especial de bases, a las que se llama incondicionales.

Por un largo tiempo un gran problema no resuelto era si todo espacio de Banach separable tiene una base. Esta pregunta fue respondida negativamente por P. Enflo en 1973 [8]. Por otro lado, no es difícil mostrar que todo espacio de Banach contiene un subespacio con base. Los espacios con bases incondicionales tienen mucha más estructura que los espacios en general, por lo que es fácil encontrar ejemplos de espacios que no las tienen. Por ejemplo, los espacios $C([0,1])$ y L_1 no tienen ninguna base incondicional. Esto nos lleva a la pregunta de si todo espacio contiene un subespacio de dimensión infinita con una base incondicional, que es precisamente el problema de la sucesión básica incondicional, resuelto por Gowers y Maurey en [13] al construir un espacio, basado en el de Schlumprecht, que no tiene ningún subespacio con base incondicional.

La meta principal de este trabajo es mostrar una generalización de la construcción del espacio de Schlumprecht, debida a Gowers y Maurey, con la cual se obtiene una infinidad de espacios de Banach arbitrariamente distorsionables no isomorfos entre sí. Aunque el espacio de Schlumprecht fue construido originalmente en [24], seguimos la estrategia usada por Gowers y Maurey, que lo desarrollaron utilizando resultados enunciados con un poco más de generalidad para poder aplicarlos a su espacio en la parte principal del artículo [13]. El resto de este trabajo está organizado como sigue. En el primer capítulo enunciamos los resultados y definiciones que necesitaremos. En el segundo definimos los conjuntos asintóticos y probamos un útil teorema que los relaciona con la existencia de sucesiones básicas incondicionales. En el tercero definimos una clase de espacios que son una generalización del construido por Schlumprecht y probamos que algunos de ellos (incluyendo, por supuesto, al de Schlumprecht) son arbitrariamente distorsionables usando el mencionado teorema, con lo cual mostramos la interesante relación entre los conceptos de distorsionabilidad, conjuntos asintóticos y sucesiones básicas incondicionales. Además, probamos que los espacios así construidos no son isomorfos entre sí.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enlistan las definiciones y los resultados más relevantes para el trabajo que se presenta. Suponemos que el lector tiene los conocimientos básicos de álgebra lineal y análisis cubiertos en un primer curso de nivel licenciatura, por lo que aquí solamente se incluye material un poco más especializado. Específicamente, se tratan algunos aspectos de la teoría general de los espacios normados y de Banach, y de las bases de Schauder. Aunque son temas que no todo estudiante de licenciatura llega a ver, éstos son bastante conocidos, por lo que en general se enuncian solamente las definiciones y los resultados que utilizaremos, sin demostraciones.

1.1. Conjuntos

Como es usual, denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, por $\mathbb{Q}$ al de los racionales, por $\mathbb{R}$ al de los reales y por $\mathbb{C}$ al de los complejos. El conjunto de los números reales no negativos será denotado por $\mathbb{R}^+$, y el de los números reales positivos por $\dot{\mathbb{R}}^+$.

Todos los espacios vectoriales que manejaremos lo serán sobre el campo $\mathbb{K}$, que siempre será los reales o los complejos. Cuando no sea necesario referirnos directamente al campo, lo omitiremos en los enunciados.

La cardinalidad de un conjunto A será denotada por $|A|$.

1.2. Algunas funciones importantes

Dados números reales a y b, denotamos por $a \vee b$ al máximo de a y b.

Para un número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota al máximo entero mayor o igual a x.

1.3. Convexidad, concavidad, submultiplicatividad y supermultiplicatividad

Definición 1.1 *Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $D \subset V$ es* **convexo** *si para cualesquiera $x, y \in D$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$.*

Definición 1.2 *Sean V un espacio vectorial y $D \subset V$ convexo. Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es* **cóncava** *si*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in D$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposición 1.3 (Desigualdad de Jensen) *Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, $D \subset V$ convexo y $f : D \to \mathbb{R}$ una función cóncava. Entonces*

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in D$.

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es evidentemente cierto, y para $n = 2$ el resultado es consecuencia directa de la definición de función cóncava. Ahora supongamos que es válido para $n = k$. Entonces, utilizando la definición de función cóncava y la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right) &= f\left(\frac{1}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}a_i\right) \geq \frac{1}{k+1}f(a_{k+1}) + \frac{k}{k+1}f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \\ &\geq \frac{1}{k+1}f(a_{k+1}) + \frac{k}{k+1}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(a_i) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} f(a_i), \end{aligned}$$

lo cual finaliza la prueba. ■

Definición 1.4 *Sea $D \subset \mathbb{R}^+$ un conjunto cerrado bajo la multiplicación, es decir, tal que $xy \in D$ para cualesquiera $x, y \in D$. Una función $f : D \to \mathbb{R}^+$ es* **submultiplicativa** *si $f(xy) \leq f(x)f(y)$ para cualesquiera $x, y \in D$, y es* **supermultiplicativa** *si $f(xy) \geq f(x)f(y)$ para cualesquiera $x, y \in D$.*

Proposición 1.5 *Sean $D \subset \mathbb{R}^+$ un conjunto cerrado bajo la multiplicación y $G : D \to \dot{\mathbb{R}}^+$ una función supermultiplicativa (submultiplicativa). Entonces la función $g : D \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(x) = x/G(x)$ es submultiplicativa (supermultiplicativa).*

Demostración. Sean $x, y \in D$. Si G es supermultiplicativa,

$$g(xy) = \frac{xy}{G(xy)} \leq \frac{xy}{G(x)G(y)} = g(x)g(y),$$

y entonces g es submultiplicativa. El otro caso se demuestra análogamente. ■

1.4. Espacios normados y de Banach

Los objetos matemáticos utilizados en este trabajo son, principalmente, espacios normados y de Banach. De acuerdo con Jean Dieudonné [7], Fréderic Riesz consideró desarrollar una teoría general de los espacios normados completos, pero nunca publicó ningún trabajo al respecto. Los primeros trabajos publicados en esa dirección son un artículo de Hans Hahn [14] y la tesis de Stefan Banach [1], ambos en 1922. El desarrollo de la teoría continuó a lo largo de los años veinte, y un momento decisivo lo marcó la aparición del libro de Banach *Théorie des Opérations Linéaires* [2], que fue durante muchos años la referencia obligada en el campo.

El lector interesado en la teoría general de los espacios normados y de Banach puede encontrar más detalles en [9] y [19].

1.4.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.6 *Una* **norma** *en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(I) $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(II) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(III) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición 1.7 *Un* **espacio normado** *es un espacio vectorial X con una norma $\|\cdot\|$. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es* **de Banach** *si es completo.*

La diferencia fundamental entre un espacio vectorial a secas y uno normado es que éste último posee una topología natural, que definimos a continuación.

Proposición 1.8 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ definimos*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Entonces, el conjunto $\{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ es una base de una topología para X, llamada la **topología inducida** *por la norma.*

Algunas nociones importantes en los espacios normados son completamente topológicas, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.9 *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial X son* **equivalentes** *si inducen la misma topología en X.*

Proposición 1.10 *Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X. Entonces, estas normas son equivalentes si y sólo si existe un $M > 0$ tal que para toda $x \in X$,*

$$\frac{1}{M} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 .$$

Ahora definimos el concepto de subespacio generado.

Definición 1.11 *Sean X un espacio normado y $A \subset X$. El* **subespacio generado** *por A es el mínimo subespacio de X que contiene a A, denotado por $\operatorname{sp} A$ o $\langle A \rangle$. El* **subespacio cerrado generado** *por A es el mínimo subespacio cerrado de X que contiene a A, denotado por $[A]$.*

En un espacio normado existen dos conjuntos importantes, la esfera y la bola unitarias.

Definición 1.12 *Sea X un espacio normado. La* **bola unitaria** *de X es el conjunto*

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

y la **esfera unitaria** *de X es el conjunto*

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

En $\mathbb{K}^n$, por el teorema de Heine-Borel los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. De hecho, esta propiedad caracteriza a los espacios normados de dimensión finita.

Teorema 1.13 *Sea X un espacio normado. Entonces $B(X)$ es compacta si y sólo si X es de dimensión finita.*

1.4.2. Operadores lineales

Como los espacios normados son espacios vectoriales que además tienen una topología, las funciones de interés son naturalmente las funciones lineales y continuas.

Definición 1.14 *Sean X y Y dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$.*

(I) *Un* **operador lineal** *es una función lineal $T : X \to Y$.*

(II) *A los operadores lineales de X en $\mathbb{K}$ los llamamos* **funcionales**.

(III) *Un operador lineal $T : X \to Y$ es una* **isometría** *si $\|Tx\| = \|x\|$ para toda $x \in X$.*

(IV) *Si un operador lineal $T : X \to Y$ es biyectivo y además es un homeomorfismo, diremos que es un* **isomorfismo** *de espacios normados. Si además T es una isometría, diremos que X y Y son* **isométricamente isomorfos**, *y que T es un* **isomorfismo isométrico**.

Dado que los operadores no lineales no son de interés en este contexto, muchas veces se omite el adjetivo "lineal" y se dice simplemente "operador" o "funcional".

Teorema 1.15 *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces son equivalentes:*

(I) *T es continuo.*

(II) *T es continuo en 0.*

(III) *T es continuo en algún punto de X.*

(IV) *Existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para toda $x \in X$.*

Definición 1.16 *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Definimos la* **norma** *de T por*

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \textit{para toda } x \in X\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

Por lo anterior, a los operadores lineales continuos también se les llama ***acotados*** . Un resultado básico acerca de la norma de un operador es el siguiente.

Proposición 1.17 *Sean X, Y y Z espacios normados, y $S : X \to Y$ y $T : Y \to Z$ operadores lineales acotados. Entonces $T \circ S : X \to Z$ es un operador lineal acotado y $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.*

Un tipo particular de operadores lineales son las proyecciones.

Definición 1.18 *Sea X un espacio normado. Un operador lineal $P : X \to X$ es una* **proyección** *si $P^2 = P$.*

Proposición 1.19 *Sean X un espacio normado y $P : X \to X$ una proyección tal que $P \not\equiv 0$. Entonces $\|P\| \geq 1$.*

Demostración. Como $P \not\equiv 0$, existe $x \in X$ tal que $y = Px \neq 0$. Entonces $\|Py\| = \|PPx\| = \|Px\| = \|y\|$. Por lo tanto, $\|P\| \geq 1$. ■

Uno de los teoremas más importantes en la teoría de espacios normados es el de Hahn-Banach. Existen muchas versiones distintas de éste, mas en este trabajo sólo utilizaremos la siguiente.

Teorema 1.20 (Hahn-Banach) *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Entonces existe una funcional lineal continua f tal que $f(x) = \|x\|$ y $\|f\| = 1$.*

1.4.3. Dualidad, reflexividad y completaciones

Definición 1.21 *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. El* **dual** *de X es el espacio de las funcionales lineales continuas de X, es decir, el conjunto*

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K} : f \ \textit{es lineal y continua}\},$$

con la norma de la definición 1.16.

A partir de la completez del campo $\mathbb{K}$ se deduce con facilidad que el dual de un espacio normado siempre es un espacio de Banach.

Definición 1.22 *Sea X un espacio normado. La* **inyección canónica** *de X en X^{**} es la función $j : X \to X^{**}$ dada por*

$$(j(x))(x^*) = x^*(x),$$

para toda $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Definición 1.23 *Un espacio normado X es reflexivo si $j(X) = X^{**}$, donde j es la inyección canónica de la definición* 1.22.

Es fácil probar que para un espacio normado X la inyección canónica $j : X \to j(X) \subset X^{**}$ es un isomorfismo isométrico de espacios normados. Esto nos permite demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.24 *Sea X un espacio normado. Entonces existe la* **completación** *de X, es decir, un espacio de Banach $\bar{X}$ tal que existe un isomorfismo isométrico entre X y un subespacio denso de $\bar{X}$.*

Demostración. Basta con tomar $\bar{X} = \overline{j(X)}$, donde $j : X \to X^{**}$ es la inyección canónica y la barra denota la cerradura en X^{**}. Claramente este espacio cumple las propiedades pedidas, y es evidente que cualquier otro que las cumpla es isométricamente isomorfo a éste. ∎

Generalmente pensaremos en X como un subconjunto de $\bar{X}$, aunque en realidad el que es un subconjunto de $\bar{X}$ no es X, sino un subespacio de $\bar{X}$ isométricamente isomorfo a X.

1.4.4. Sumas directas y subespacios complementados

Definición 1.25 *Sea X un espacio de Banach, y sean Y y Z dos subespacios cerrados de X. Decimos que X es* **suma directa** *de Y y Z si $Y \cap Z = \{0\}$ y $Y + Z = X$.*

Definición 1.26 *Sea X un espacio de Banach. Decimos que un subespacio cerrado Y de X es* **complementado** *en X si existe una proyección lineal acotada P de X sobre Y.*

La definición anterior no parece tener nada que ver con el término “complementado”, pero la siguiente proposición ilustra el porqué del nombre.

Proposición 1.27 *Sean X un espacio de Banach y F un subespacio cerrado de X. Entonces F es complementado si y sólo si existe un subespacio cerrado G de X tal que $X = F \oplus G$.*

Ciertos tipos de subespacios siempre son complementados, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.28 *Sean X un espacio de Banach, $Y \subset X$ un subespacio de dimensión finita y $Z \subset X$ un subespacio cerrado de codimensión finita. Entonces Y y Z son complementados en X.*

1.4.5. La topología débil

Por el teorema 1.13, los únicos espacios normados cuya bola unitaria cerrada es compacta son los de dimensión finita. Históricamente, esto motivó la búsqueda de topologías más débiles, con más compactos y que siguieran estando relacionadas con la estructura lineal del espacio. Una de las más importantes y conocidas es la llamada topología débil, que definimos a continuación.

Definición 1.29 *Sean X un espacio normado y X^* su dual. La* topología débil *en X es la topología que tiene como base local en $x_0 \in X$ a los conjuntos de la forma*

$$V(x_0, x_1^*, \ldots, x_k^*, \varepsilon) = \cap_{i=1}^k \{x \in X : |x_i^*(x - x_0)| < \varepsilon\},$$

con $x_1^*, \ldots, x_k^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$.

El siguiente teorema caracteriza la convergencia de sucesiones en la topología débil.

Teorema 1.30 *Sean X un espacio normado, X^* su dual, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ una sucesión. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x en la topología débil si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x)$ para toda $x^* \in X$.*

La siguiente proposición muestra en qué sentido la topología débil conserva la información referente a la estructura lineal del espacio.

Proposición 1.31 *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ lineal. Entonces T es continuo con respecto a las topologías inducidas por las normas si y sólo si lo es respecto a las topologías débiles.*

1.4.6. Ejemplos

Ahora mostramos algunos de los ejemplos clásicos de espacios de Banach.

Definición 1.32 *Para $p \geq 1$, el espacio ℓ_p es el conjunto de sucesiones de escalares $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ tales que*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$$

con la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definición 1.33 *El espacio ℓ_∞ es el conjunto de sucesiones de escalares $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ tales que*

$$\sup_n |x_n| < \infty$$

con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Definición 1.34 *El espacio c_0 es el conjunto de sucesiones de escalares $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes a 0 con la norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Claramente, c_0 es un subespacio cerrado de ℓ_∞.

1.5. Bases de Schauder

El concepto de base de Hamel juega un papel muy importante en el estudio de los espacios vectoriales. En particular, en el caso de los espacios vectoriales de dimensión finita, el estudio de los operadores lineales acotados (i.e. continuos) se simplifica porque las cosas se pueden expresar de manera fácil en términos de bases. Esto se debe a que la convergencia es equivalente a la convergencia "por coordenadas", es decir, si $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de Hamel en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n, y $\{a_i^m\}_{i=1}^{n}, \{a_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{K}$,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i^m x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{m\to\infty} a_i^m = a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Sin embargo, en un espacio de Banach de dimensión infinita esto no necesariamente es cierto. Por ejemplo, si $X = \ell_\infty$ y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \\
x_2 &= (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots) \\
x_3 &= (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}, \ldots) \\
&\vdots \\
x_i &= (0, \ldots, 0, \frac{1}{2^{i-2}}, \frac{1}{2^{i-1}}, \ldots, \frac{1}{2^{i-1}}, \ldots)
\end{aligned}$$

no es difícil ver que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un conjunto linealmente independiente, que la sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida por

$$y_i = x_1 - \sum_{j=2}^{i+1} x_j$$

converge a 0 en ℓ_∞, y que sin embargo los coeficientes de cada x_i con $i \geq 2$ convergen a -1.

Luego, resulta natural buscar una noción de base que rescate las ventajas que nos dan las bases de Hamel en el caso de dimensión finita, relacionadas con la convergencia y por lo tanto con la norma que tiene el espacio. Como en el caso de espacios de Hilbert, donde se tienen las bases ortonormales, la clave está en permitir sumas infinitas. Una vez más no se incluyen todos los detalles, puesto que se trata de cuestiones conocidas y fáciles de encontrar en libros sobre el tema. Para las pruebas de los resultados o simplemente profundizar en el tema, se sugieren [9], [18] y [19].

1.5.1. Definiciones y propiedades fundamentales

Las bases anunciadas, que serán de vital importancia en este trabajo, reciben el nombre de *bases de Schauder*, aunque por simplicidad en lo sucesivo las llamaremos simplemente bases.

Definición 1.35 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *es una* **base de Schauder** *si para toda* $x \in X$ *existe una única sucesión de escalares* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0.$$

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *es una* **sucesión básica** *si es una base de Schauder del espacio vectorial cerrado generado por* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Una sucesión básica $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es* **seminormalizada** *si existe* $M > 0$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{M} \leq \|x_n\| \leq M,$$

y es **normalizada** *si* $\|x_n\| = 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

El concepto de base de Schauder solamente está definido en espacios de Banach. Sin embargo, en este trabajo nos referiremos con frecuencia a bases de espacios normados. Este concepto se precisa en la siguiente definición.

Definición 1.36 *Sean* X *un espacio normado y* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. *Diremos que* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una base de* X *si es una base de Schauder de* $\bar{X}$, *la completación de* X.

Lema 1.37 *Si* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión básica seminormalizada en un espacio de Banach* X, *y* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proposición 1.38 *Sea* X *un espacio de Banach con base* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Entonces los operadores* P_n *dados para cada* $n \in \mathbb{N}$ *por*

$$P_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

para toda $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$, *son unas proyecciones acotadas y* $\sup_n \|P_n\| < \infty$. *Al número* $\sup_n \|P_n\|$ *se le llama la* **constante de base** *de* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *y a las proyecciones* P_n *se les llama las* **proyecciones asociadas a la base** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Además,* $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ *para toda* $x \in X$.

Proposición 1.39 *Sea* X *un espacio de Banach sobre* $\mathbb{K}$ *con base* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Si para cada* $n \in \mathbb{N}$ *definimos* $f_n : X \to \mathbb{K}$ *por*

$$f_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = a_n,$$

entonces cada f_n *es una funcional lineal acotada. A las funcionales* f_n *suele denotárseles por* x_n^* *y se les llama* **funcionales coeficiente** *o* **funcionales biortogonales asociadas a la base** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Además de su definición, existen otras maneras de caracterizar a las bases. Una de ellas es la siguiente.

Teorema 1.40 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

(I) *$x_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

(II) *Existe $M \geq 1$ tal que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{m}$, si $n < m$ entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

(III) *El espacio vectorial cerrado generado por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es X.*

Observemos que para una sucesión básica, por definición la constante de base es el mínimo número M que satisface (II).

Ejemplo 1.41 El teorema 1.40 nos permite encontrar fácilmente bases en algunos espacios de Banach. Como primer ejemplo tenemos los espacios ℓ_p (con $1 \leq p < \infty$) y c_0 definidos en la sección 1.4.6. En estos espacios hay una base natural, llamada la *base canónica*, compuesta por los vectores $\mathbf{e}_n = (e_n^m)_{m=1}^{\infty}$ dados por

$$e_n^m = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Es trivial verificar que en estos espacios la sucesión $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las condiciones del teorema 1.40.

Otro ejemplo es el sistema de Haar $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $L_p[0,1]$, el espacio de Banach de las clases de equivalencia de funciones integrables respecto a la medida de Lebesgue sobre el intervalo [0,1], para $1 \leq p < \infty$, dado por $h_1(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$, y para $n \geq 2$, si m es el entero positivo tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$,

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1, \\ -1 & \text{si } \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La prueba de que el sistema de Haar efectivamente es una base puede ser encontrada en [18] o en [19].

Además, el teorema 1.40 nos provee de una manera muy sencilla de construir otras sucesiones básicas a partir de una dada.

Proposición 1.42 *Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X con constante de base K. Supongamos que $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de enteros con $m_1 = 0$, $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares y que para toda $j \in \mathbb{N}$*

$$u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i x_i \neq 0.$$

Entonces la sucesión $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X, llamada **base bloque** *de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, cuya constante de base es menor o igual a K.*

Es bien conocido un resultado de álgebra lineal donde, usando el lema de Zorn, se prueba que todo espacio vectorial tiene una base de Hamel. Lamentablemente, el resultado análogo para bases de Schauder no es cierto. Notemos que si un espacio de Banach X tiene base entonces es separable, puesto que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base es claro que los elementos de X de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ con $Re(a_n), Im(a_n) \in \mathbb{Q}$ forman un subconjunto denso numerable de X. Como ℓ_∞ no es separable (ver [9]), concluimos que no tiene base.

Es natural preguntarse ahora si todo espacio de Banach separable tiene una base. La pregunta fue planteada por Banach en su famoso libro [2], y se le conoce como el problema de la base. Ésta permaneció abierta por cuarenta años, hasta que finalmente Per Enflo la respondió negativamente en un artículo en 1973 [8], en el cual mostró un contraejemplo reflexivo: para cada $p \neq 2$, el espacio $L_p([0,1], \lambda)$ (donde λ es la medida de Lebesgue), tiene un subespacio separable que no tiene base. Más recientemente, Andrzej Szankowski [26] demostró que $\mathcal{B}(H)$, el espacio de operadores lineales continuos de un espacio de Hilbert en sí mismo, también tiene subespacios separables que no tienen base.

Mas no todo está perdido: al menos es cierto que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene un subespacio que tiene una base (o equivalentemente, contiene una sucesión básica). Este resultado tiene una historia interesante: frecuentemente se le atribuye a Banach puesto que apareció por primera vez en su libro [2], sin demostración, después de unos comentarios acerca del problema de la base. Por la manera en que Banach enuncia el resultado, parece que lo deja como un ejercicio sencillo para el lector.[1] Sin embargo, ninguna prueba fue publicada durante los siguientes 26 años; fue hasta 1958 que se publicaron tres pruebas, debidas a Bernard Gelbaum [10], Czesław Bessaga y Aleksander Pełczyński [3] y Mahlon Day [5] (aunque la prueba de Day contenía un error que corrigió en otro artículo en 1962 [6]). Como muestra de la fe en Banach, la revisión de [3] aparecida en *Mathematical Reviews* se refirió al logro de Bessaga y Pełczyński como una nueva prueba de un resultado conocido.

Esta historia, como la de Fermat, deja abierta la pregunta de si Banach realmente tenía una prueba. Una posible pista apareció en un artículo de Pełczyński [22] en 1962, en el que muestra un método para construir sucesiones básicas, que atribuye a Stanisław Mazur,

[1] "Remarcons toutefois que tout espace du type (B) à une infinité de dimensions renferme un ensemble linéaire fermé à une infinité de dimensions qui admet une base".

con el cual se puede probar fácilmente que todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica. Parece probable que Banach conociera el método de Mazur y lo haya tenido en mente cuando enunció el resultado. De cualquier modo, el resultado es cierto y lo enunciamos a continuación.

Proposición 1.43 *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

Una vez que sabemos que un espacio de Banach tiene una sucesión básica, una pregunta interesante es si ésta es única en el siguiente sentido.

Definición 1.44 *Dos sucesiones básicas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach son* **equivalentes** *si para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.*

Proposición 1.45 *Dos sucesiones básicas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach son equivalentes si y sólo si existe $K > 0$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{m}$,*

$$\frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq K\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|.$$

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumplen esta desigualdad, diremos que son K-equivalentes.

El concepto de equivalencia resulta útil, mas es fácil ver que la respuesta a la pregunta de la unicidad no siempre es positiva, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.46 En c_0, consideremos la base canónica $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la base sumante $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $s_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$. Primero verifiquemos que esta última efectivamente es una base:

(I) Claramente $s_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(II) Sean $n > m$ y $a_1, \ldots, a_n$ escalares. Entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i s_i\right\| = \sup_{r\leq m}\left|\sum_{i=r}^{m} a_i\right| = \sup_{r\leq m}\left|\sum_{i=r}^{n} a_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leq 2\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i s_i\right\|.$$

(III) Como $\mathbf{e}_1 = s_1$ y $\mathbf{e}_i = s_i - s_{i-1}$ para $i > 1$, es claro que $[s_n]_{n=1}^{\infty} = c_0$.

Y por lo tanto del teorema 1.40 se sigue que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base. Observemos que para $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i\right\| = 1, \qquad \text{pero} \qquad \left\|\sum_{i=1}^{m} s_i\right\| = m,$$

y entonces, por la proposición 1.45, las dos bases no son equivalentes.

De hecho, la respuesta es siempre negativa, pues se tiene el siguiente resultado [23]: si X es un espacio de Banach con base, entonces existe una infinidad no numerable de bases de X normalizadas no equivalentes entre sí.

Por otro lado, si se tiene una sucesión básica seminormalizada, cualquier sucesión que esté suficientemente cerca de ésta resulta ser básica y equivalente a la original, como muestra el siguiente teorema, que es una modificación del teorema 6.20 de [9], y su prueba es esencialmente la misma.

Teorema 1.47 *Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica seminormalizada con constante de base K tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $M^{-1} \leq \|x_n\| \leq M$. Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos en X tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{4KM},$$

entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica 2-equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Más aún, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es.

Como ya mencionamos antes, y a diferencia de otras propiedades como la reflexividad, tener base no es algo que se herede a los subespacios, mas es cierto que todo subespacio de un espacio con base tiene a su vez un subespacio con base; más aún, este último subespacio siempre puede ser encontrado de modo que tenga una base arbitrariamente cercana a una base bloque, como se detalla en el siguiente teorema.

Teorema 1.48 *Sean X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, si F es un subespacio de dimensión infinita de X, existen una base bloque normalizada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X y un subespacio de dimensión infinita G de F que tiene una base normalizada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - u_n\| < \varepsilon.$$

El siguiente lema está relacionado con los dos anteriores.

Lema 1.49 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión seminormalizada convergente a 0 en la topología débil de X, entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión equivalente a una base bloque de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Algunas bases, como las canónicas en c_0 y ℓ_p, tienen la particularidad de que para cualesquiera naturales $n \leq m \leq k$ y escalares $a_n, \ldots, a_k$, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base,

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=n}^{k} a_i x_i \right\|.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.50 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

(I) *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama una* **base monótona** *si su constante de base es 1, o equivalentemente, si para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{m+1}$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m+1} a_n x_n \right\|.$$

(II) *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama una* **base bimonótona** *si es monótona y además para cualesquiera naturales $l < m$ y cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=l}^{m}$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{n=l+1}^{m} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=l}^{m} a_n x_n \right\|.$$

1.5.2. Bases incondicionales

Otro tipo de bases que trataremos son las bases incondicionales, concepto basado en la noción de convergencia incondicional.

Definición 1.51 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$* **converge incondicionalmente**, *si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$.*

Teorema 1.52 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente.*

(II) *Para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{n\in\sigma} x_n \right\| < \varepsilon$ para todo conjunto finito $\sigma \subset \mathbb{N}$ con $\min \sigma > N$.*

(III) *La serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge para cualquier sucesión de naturales $n_1 < n_2 < \cdots$*

Ahora podemos definir el concepto de base incondicional.

Definición 1.53 *Una base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se llama una* **base incondicional**, *si para toda $x \in X$ su expansión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ en términos de la base, converge incondicionalmente.*

Teorema 1.54 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional.*

(II) *$\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.*

(III) *Existe una constante C tal que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^m$ y toda sucesión de escalares $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^m$ con $|\varepsilon_n| \leq 1$ para $1 \leq n \leq m$, se tiene la desigualdad*

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n=1}^m a_n x_n \right\|.$$

Una base que satisface la condición (III) para la constante C se llama *C-incondicional* .

Ejemplo 1.55 De (III) en el teorema 1.54 es fácil ver que las bases canónicas de c_0 y ℓ_p (para $1 \leq p < \infty$) son incondicionales. Sean $m \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}_{n=1}^m$ una sucesión de escalares y $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^m$ una sucesión de escalares con $|\varepsilon_n| \leq 1$ para $1 \leq n \leq m$. Entonces,

(1) En c_0, si $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ es la base canónica,

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n \mathbf{e}_n \right\| = \sup_{1 \leq n \leq m} |\varepsilon_n a_n| \leq \sup_{1 \leq n \leq m} |a_n| = \left\| \sum_{n=1}^m a_n \mathbf{e}_n \right\|,$$

y entonces, por el teorema 1.54, la base canónica de c_0 es 1-incondicional.

(2) Para $1 \leq p < \infty$, en ℓ_p, si $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ es la base canónica,

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n a_n \mathbf{e}_n \right\| = \left(\sum_{n=1}^m |\varepsilon_n a_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{n=1}^m a_n \mathbf{e}_n \right\|,$$

y entonces, por el teorema 1.54, la base canónica de ℓ_p es 1-incondicional.

También es fácil encontrar un ejemplo de una base que no es incondicional. Consideremos la base sumante $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ en c_0 del ejemplo 1.46, y las sucesiones de escalares $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ dadas por $a_n = \varepsilon_n = (-1)^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^k \varepsilon_n a_n s_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^k s_n \right\| = k \qquad \text{y} \qquad \left\| \sum_{n=1}^k a_n s_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^k (-1)^n s_n \right\| = 1,$$

y por lo tanto de la parte (III) teorema 1.54, $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ no es una sucesión básica incondicional.

Lema 1.56 *Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una base incondicional seminormalizada en un espacio de Banach X, entonces $\{x_n / \|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ es una base equivalente a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.*

1.5.3. Otras clases especiales de bases

Hay otros dos tipos de bases que también utilizaremos más adelante.

Definición 1.57 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Decimos que la base $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es* **acotadamente completa** *si para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| < \infty$, la serie $\sum_{i=1}^\infty a_i x_i$ converge.*

Ejemplo 1.58 La base canónica de c_0 no es acotadamente completa, puesto que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i\right\| = 1,$$

pero la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{e}_i$ no es convergente, ya que para cualesquiera naturales $m \neq n$ tenemos que $\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^{m}\mathbf{e}_i\| = 1$, y entonces la sucesión de sumas parciales no es de Cauchy.

Por otro lado, la base canónica en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ sí lo es. Si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i\| = M < \infty$, entonces $\sup_n \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} = M$, de donde $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p} = M$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$ entonces $\left(\sum_{i=n}^{m}|a_i|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$, y por lo tanto la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i$ es de Cauchy y entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\mathbf{e}_i$ converge.

Definición 1.59 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Decimos que la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es* **reductora** *si para toda funcional $x^* \in X^*$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x^*|_{[x_i]_{i=n}^{\infty}}\right\| = 0.$$

Teorema 1.60 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces la sucesión de funcionales biortogonales $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ asociada a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^* si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base reductora.*

Ejemplo 1.61 A partir del teorema 1.60 es fácil mostrar que la base canónica en ℓ_p (para $1 < p < \infty$) y la de c_0 son reductoras, mientras que la de ℓ_1 no, puesto que es sabido que:

(1) El dual de c_0 es ℓ_1 y las funcionales biortogonales asociadas a la base canónica de c_0 son la base canónica de ℓ_1.

(2) Para $1 < p < \infty$, el dual de ℓ_p es ℓ_q con $1/p + 1/q = 1$, y las funcionales biortogonales asociadas a la base canónica de ℓ_p son la base canónica de ℓ_q.

(3) El dual de ℓ_1 es ℓ_∞, y ℓ_∞ no tiene base.

Esto puede se consultado, por ejemplo, en [9] y [19].

El siguiente resultado de R.C. James caracteriza a los espacios de Banach reflexivos con base.

Teorema 1.62 *Sea X un espacio de Banach con base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, X es reflexivo si y sólo si la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es reductora y acotadamente completa.*

Otro teorema relacionado con el anterior

Teorema 1.63 *Sea X un espacio de Banach con base incondicional $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, X es reflexivo si y sólo si no contiene ningún subespacio cerrado isomorfo a c_0 ni a ℓ_1.*

Capítulo 2

Conjuntos asintóticos

Comenzamos este capítulo definiendo los conjuntos asintóticos, que son fundamentales para enunciar y probar el resultado principal de este capítulo (teorema 2.6): si un espacio normado X contiene suficientes conjuntos asintóticos, éstos pueden ser utilizados para construir una norma equivalente en X que no tenga sucesiones básicas C-incondicionales para cierta C.

Definición 2.1 *Sea X un espacio normado. Decimos que un conjunto $A \subset S(X)$ es* **asintótico** *si $A \cap S(Y) \neq \emptyset$ para todo subespacio de dimensión infinita (no necesariamente cerrado) $Y \subset X$.*

Definición 2.2 *Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de la esfera unitaria de un espacio normado X y $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de la bola unitaria de X^*. Decimos que $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{A_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ es un* **sistema biortogonal asintótico con constante** *δ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(I) *El conjunto A_n es asintótico para toda $n \in \mathbb{N}$.*

(II) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A_n$ existe $x^* \in A_n^*$ tal que $x^*(x) > 1 - \delta$.*

(III) *Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, cada $x \in A_n$ y cada $x^* \in A_m^*$, $|x^*(x)| < \delta$.*

Bajo estas circunstancias, diremos que X contiene un sistema biortogonal asintótico. Si $\delta > 1/2$ existe un sistema asintótico biortogonal trivial, dado por $A_n = S(X)$ y $A_n^* = \frac{1}{2}B(X^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $\delta \leq 1/2$ no es nada obvio que algún espacio de Banach contenga un sistema biortogonal asintótico con constante δ.

Notemos que los A_n's están separados en el siguiente sentido: si $n \neq m$, $x \in A_n$ y $y \in A_m$, entonces existe $x^* \in A_n^*$ tal que $x^*(x) > 1 - \delta$ y $|x^*(y)| < \delta$. Como $x^* \in B(X^*)$, tenemos que $\|x - y\| \geq \|x^*\| \, \|x - y\| \geq |x^*(x - y)| \geq |x^*(x)| - |x^*(y)| > 1 - \delta - \delta = 1 - 2\delta$.

Antes de pasar al resultado principal del capítulo, necesitaremos algunas definiciones y resultados previos.

Proposición 2.3 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado separable y $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{A_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ un sistema biortogonal asintótico con constante δ en X. Entonces existe un sistema biortogonal asintótico con constante δ en X de la forma $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Z_n^*\}_{n=1}^{\infty})$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, $Z_n^* \subset A_n^*$ y Z_n^* es numerable.*

Demostración. Como X es separable, existe un conjunto numerable $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S(X)$ denso en $S(X)$. Para cada $k, n \in \mathbb{N}$ sea $\alpha_k^n = \sup_{x^* \in A_n^*} x^*(y_k)$. Observemos que como $A_n^* \subset B(X^*)$ y $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S(X)$, $\alpha_k^n \leq 1$ para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$. Además, para $n, k \in \mathbb{N}$ existe $\{x_{n,k,m}^*\}_{m=1}^{\infty} \subset A_n^*$ tal que $\lim_{m\to\infty} x_{n,k,m}^*(y_k) = \alpha_k^n$, puesto que α_k^n es el supremo. Sea $Z_n^* = \{x_{n,k,m}^* : k, m \in \mathbb{N}\}$. Observemos que Z_n^* es numerable. Ahora consideremos $x \in A_n$. De la condición (II) de la definición 2.2, existe $x^* \in A_n^*$ tal que $x^*(x) > 1 - \delta$. Sea $r_x = x^*(x) - 1 + \delta > 0$. Como $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en $S(X)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - y_k\| < r_x/4$. Entonces, para cualquier $z^* \in B(X^*)$,

$$|z^*(x) - z^*(y_k)| \leq \|z^*\| \, \|x - y_k\| < r_x/4, \tag{2.1}$$

y por lo tanto,

$$\alpha_k^n \geq x^*(x) - r_x/4 = 1 - \delta + 3r_x/4.$$

Ahora, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n,k,m}^*(y_k) - \alpha_k^n| < r_x/4$. Entonces, por (2.1),

$$x_{n,k,m}^*(x) > \alpha_k^n - r_x/4 - r_x/4 \geq 1 - \delta + r_x/4 > 1 - \delta.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, Z_n^* es un subconjunto numerable de A_n^* tal que para toda $x \in A_n$ existe $x^* \in Z_n^*$ con $x^*(x) > 1 - \delta$, es decir, se satisface (III) para $x \in A_n$ y $x^* \in Z_n^*$.
■

Definición 2.4 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Z_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ como en la proposición 2.3. Sea $Z^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^*$. Como cada Z_n^* es numerable, Z^* lo es y por lo tanto también lo son $(Z^*)^n = \{(z_1^*, \ldots, z_n^*) : z_i^* \in Z^*, 1 \leq i \leq n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} (Z^*)^n$. Sea*

$$\sigma : \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z^*)^n \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

una función inyectiva (existe porque el dominio es numerable). Una **sucesión especial de funcionales de longitud** r **(S.E.F.L.r)** *es una sucesión de la forma $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_r^*$ donde $z_1^* \in Z_1^*$ y para $1 \leq i < r$ se tiene que $z_{i+1}^* \in Z_{\sigma(z_1^*, \ldots, z_i^*)}^*$. Una* **funcional especial de longitud** r *es la suma de los elementos de una sucesión especial de longitud r. Denotaremos por Γ_r a la colección de funcionales especiales de longitud r.*

Evidentemente esta definición depende del espacio, el sistema biortogonal asintótico y la inyección, pero siempre quedará claro a cuáles nos estamos refiriendo.

Proposición 2.5 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Z_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ como en la proposición 2.3. Entonces, para cualquier $r \in \mathbb{N}$ la función*

$$|||x||| = \|x\| \vee r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\}$$

define una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$.

Demostración. Verifiquemos que cumple las condiciones necesarias:

(I) Para cualquier S.E.F.L.r $z_1^*, z_2^*, \dots, z_r^*$, de la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} z_i^* \right\| \leq \sum_{i=1}^{r} \|z_i^*\| \leq r \tag{2.2}$$

Entonces, para $x \in X$ y $z^* \in \Gamma_r$, $|z^*(x)| \leq \|z^*\| \, \|x\| \leq r \, \|x\|$. Luego, el conjunto $\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\}$ está acotado y por lo tanto $|||x|||$ está bien definida.

(II) Como $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son funciones no negativas, $|||x||| \geq 0$ para toda $x \in X$ y además si $|||x||| = 0$ entonces $\|x\| = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

(III) Para cualesquiera $x \in X$ y λ un escalar,

$$\begin{aligned} |||\lambda x||| &= \|\lambda x\| \vee r \sup\{|z^*(\lambda x)| : z^* \in \Gamma_r\} = |\lambda| \, \|x\| \vee r \sup\{|\lambda||z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} \\ &= |\lambda| \, \|x\| \vee |\lambda| r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} = |\lambda| \, |||x||| \, . \end{aligned}$$

(IV) Sean $x, y \in X$. De la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ obtenemos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y que para toda $z^* \in X^*$ se tiene que $|z^*(x + y)| = |z^*(x) + z^*(y)| \leq |z^*(x)| + |z^*(y)|$. Luego,

$$\begin{aligned} r \sup\{|z^*(x + y)| : z^* \in \Gamma_r\} &\leq r \sup\{|z^*(x)| + |z^*(y)| : z^* \in \Gamma_r\} \\ &\leq r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} + r \sup\{|z^*(y)| : z^* \in \Gamma_r\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|||x + y||| \leq (\|x\| + \|y\|) \vee (r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} + r \sup\{|z^*(y)| : z^* \in \Gamma_r\}).$$

Por otro lado, de la definición de $|||\cdot|||$, $\|x\| \leq |||x|||$ y $r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} \leq |||x|||$. Usando lo mismo para y, obtenemos que $\|x\| + \|y\| \leq |||x||| + |||y|||$ y

$$r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} + r \sup\{|z^*(y)| : z^* \in \Gamma_r\} \leq |||x||| + |||y||| \, .$$

De todo esto se sigue que $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$.

(V) Como ya mencionamos, $\|x\| \leq |||x|||$ para toda $x \in X$.

(VI) Para todo $z^* \in \Gamma_r$, $\|z^*\| \leq r$ por (2.2). Luego, para $x \in X$,

$$\begin{aligned} |||x||| &= \|x\| \vee r \sup\{|z^*(x)| : z^* \in \Gamma_r\} \leq \|x\| \vee r \sup\{\|z^*\| \, \|x\| : z^* \in \Gamma_r\} \\ &\leq \|x\| \vee r \cdot r \, \|x\| = r^2 \, \|x\| \, . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|||\cdot|||$ es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$. ∎

El resultado principal de este capítulo es el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Sean $0 < \delta < 1/36$ y X un espacio normado separable que contiene un sistema biortogonal asintótico con constante δ. Entonces existe una norma equivalente en X tal que ninguna sucesión básica es $1/\sqrt{36\delta}$-incondicional.*

Demostración. Sean $\|\cdot\|$ la norma original en X y $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{A_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ el sistema biortogonal asintótico con constante δ en X. Usando las proposiciones 2.3 y 2.5 con $r = \lfloor \delta^{-1/2} \rfloor$, donde $\lfloor \delta^{-1/2} \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a $\delta^{-1/2}$, definimos la norma $|||\cdot|||$.

Ahora sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión básica en X. Probaremos que no es $(r-1)/4$-incondicional en la norma $|||\cdot|||$, lo cual probará el teorema puesto que como $0 < \delta < 1/36$, entonces $6 < \delta^{-1/2}$ y además, como $r = \lfloor \delta^{-1/2} \rfloor$, entonces $r \leq \delta^{-1/2} < r + 1$ y por lo tanto $\delta^{-1/2} - 1 < r$. Combinando ambas desigualdades,

$$\frac{r-1}{4} > \frac{\delta^{-1/2} - 2}{4} = \frac{\frac{2}{3}\delta^{-1/2} + \frac{1}{3}\delta^{-1/2} - 2}{4} > \frac{\frac{2}{3}\delta^{-1/2} + \frac{1}{3}6 - 2}{4} = \frac{\frac{2}{3}\delta^{-1/2}}{4} = \frac{\delta^{-1/2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{36\delta}}.$$

Sea X_1 el subespacio algebraico generado por $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Como A_1 es un conjunto asintótico y X_1 es de dimensión infinita, existe $z_1 \in A_1 \cap X_1$. Esto implica que $\|z_1\| = 1$ y que z_1 es combinación lineal de un número finito de los x_i. Enseguida, podemos hallar $z_1^* \in Z_1^*$ tal que $z_1^*(z_1) > 1 - \delta$. Ahora, sea X_2 el subespacio algebraico generado por todos los x_i excepto los usados para generar z_1. Como $A_{\sigma(z_1^*)}$ es asintótico y X_2 es de dimensión infinita, podemos encontrar $z_2 \in A_{\sigma(z_1^*)} \cap X_2$ que tiene norma 1 y es combinación lineal de un número finito de los x_i. Además, podemos encontrar $z_2^* \in Z_{\sigma(z_1^*)}^*$ tal que $z_2^*(z_2) > 1 - \delta$.

Continuando este proceso, obtenemos sucesiones $z_1, \dots, z_r$ y $z_1^*, \dots, z_r^*$ con las siguientes propiedades:

(I) $\|z_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq r$.

(II) $z_1^* \in Z_1^*$ y $z_{i+1}^* \in Z_{\sigma(z_1^*, \dots, z_i^*)}^*$ para $1 \leq i < r$ (i.e. $z_1^*, \dots, z_r^*$ es una S.E.F.L.r).

(III) $z_i^*(z_i) > 1 - \delta$ para $1 \leq i \leq r$.

(IV) Como σ es una inyección con imagen contenida en $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, si $1 \leq i, j \leq r$ e $i \neq j$ entonces $\sigma(z_1^*, \dots, z_i^*) \neq \sigma(z_1^*, \dots, z_j^*)$, y por lo tanto $|z_i^*(z_j)| < \delta$.

Ahora estimemos $|||\sum_{i=1}^{r} z_i|||$. Como $z_1^* + \cdots + z_r^*$ es una funcional especial de longitud r, por la definición de la norma tenemos

$$\begin{aligned} \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{r} z_i \right|\right|\right| &\geq r \left(\sum_{i=1}^{r} z_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^{r} z_j \right) = r \left(\sum_{i=j} z_i^*(z_j) + \sum_{i \neq j} z_i^*(z_j) \right) > r\big(r(1-\delta) - r(r-1)\delta\big) \\ &= r(r - r\delta - r^2\delta + r\delta) = r(r - r^2\delta) \geq r(r-1), \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde la última desigualdad se sigue de que $0 < r \leq \delta^{-1/2}$.

Por otro lado, si $\{w_i^*\}_{i=1}^r$ es cualquier sucesión especial de longitud r, sea t el índice máximo tal que $w_i^* = z_i^*$ para $1 \leq i \leq t$ (o bien cero si $w_1^* \neq z_1^*$). Entonces, de la desigualdad del triángulo,

$$\left|\sum_{i=1}^r (-1)^i w_i^*(z_i)\right| \leq \left|\sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i)\right| + |w_{t+1}^*(z_{t+1})| + \sum_{i=t+2}^r |w_i^*(z_i)|.$$

Recordemos que $z_1^*, w_1^* \in A_1^*$ y para $1 < l \leq r$, $w_l^* \in A^*_{\sigma(w_1^*,\ldots,w_{l-1}^*)}$ y $z_l^* \in A^*_{\sigma(z_1^*,\ldots,z_{l-1}^*)}$. Como σ es una inyección y el 1 no está en su imagen, w_i^* y z_j^* pertenecen a diferentes conjuntos A_n^* en los siguientes casos:

(1) Si $i < j$ o $i > j$:
$(w_1^*, \ldots, w_{i-1}^*)$ y $(z_1^*, \ldots, z_{j-1}^*)$ son sucesiones de tamaños distintos, por lo que

$$\sigma(w_1^*, \ldots, w_{i-1}^*) \neq \sigma(z_1^*, \ldots, z_{j-1}^*).$$

(2) Si $i = j > t+1$:
Por definición de t, $w_{t+1}^* \neq z_{t+1}^*$. Luego,

$$(w_1^*, \ldots, w_{t+1}^*, \ldots, w_{i-1}^*) \neq (z_1^*, \ldots, z_{t+1}^*, \ldots, z_{j-1}^*),$$

y entonces

$$\sigma(w_1^*, \ldots, w_{i-1}^*) \neq \sigma(z_1^*, \ldots, z_{j-1}^*).$$

Por la propiedad (III) en la definición 2.2, en estos dos casos se tiene que $|w_i^*(z_j)| < \delta$. En particular, $\sum_{i=t+2}^r |w_i^*(z_i)| < \delta r$ y $\sum_{i \neq j} |w_i^*(z_j)| < \delta r(r-1)$. Cuando $i \leq t$ sabemos que $1 - \delta < w_i^*(z_i) \leq 1$ y entonces $\left|\sum_{i=1}^t (-1)^i w_i^*(z_i)\right| \leq 1 + \delta t/2$ (puesto que $|(-1)^i w_i^*(z_i) + (-1)^{i+1} w_{i+1}^*(z_{i+1})| < \delta$). Se sigue que

$$\left|\sum_{i=1}^r (-1)^i w_i^*(z_i)\right| \leq 1 + \delta r/2 + 1 + \delta r \leq 2(1 + \delta r). \tag{2.4}$$

Finalmente, de la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^r (-1)^i z_i\right\| \leq \sum_{i=1}^r \left\|(-1)^i z_i\right\| = r. \tag{2.5}$$

Usando $0 < r \leq \delta^{-1/2}$, (2.4), (2.5) y que $r^2 > r$ puesto que $r \geq 6$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right|\right|\right| &= \left\|\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right\| \vee r\sup\left\{\left|z^*\left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right)\right| : z^* \in \Gamma_r\right\} \\
&\leq r \vee r\sup\left\{\left|\left(\sum_{j=1}^{r} w_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right)\right| : w_1^*, \ldots, w_r^* \text{ es una S.E.F.L.}r\right\} \\
&\leq r \vee r\sup\left\{\left|\sum_{i=j}(-1)^i w_j^*(z_i)\right| + \sum_{i\neq j}|w_j^*(z_i)| : w_1^*, \ldots, w_r^* \text{ es una S.E.F.L.}r\right\} \\
&\leq r \vee r\big(2(1+\delta r) + \delta r(r-1)\big) = r \vee r(2 + 2\delta r + \delta r^2 - \delta r) \\
&= r \vee r(2 + \delta r + \delta r^2) = r(2 + \delta r + \delta r^2) < r(2 + 2\delta r^2) \leq 4r.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue, usando (2.3)

$$(r-1)\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right|\right|\right| < 4r(r-1) \leq 4\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{r} z_i\right|\right|\right|$$

es decir

$$\frac{r-1}{4}\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{r}(-1)^i z_i\right|\right|\right| < \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{r} z_i\right|\right|\right|.$$

Ahora bien, como cada z_i es combinación lineal de un número finito de los x_n, $z_n \in X_n$ y $X_n \cap X_m = \{0\}$ si $n \neq m$, esto se puede escribir como

$$\frac{r-1}{4}\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right|\right|\right| < \left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n\right|\right|\right|$$

para una cierta sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ y $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ para $1 \leq n \leq m$, lo cual prueba que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es $(r-1)/4$-incondicional en la norma $|||\cdot|||$. ■

Capítulo 3

Los espacios de Schlumprecht

En este capítulo consideraremos el espacio de Schlumprecht [24], el primer ejemplo conocido de un espacio que es λ-distorsionable para todo λ. El resultado principal de este capítulo es probar precisamente esto. Para demostrarlo seguiremos la estrategia que usaron Gowers y Maurey en [13].

3.1. Espacios distorsionables

Recordemos la definición de espacio distorsionable.

Definición 3.1 *Un espacio normado de dimensión infinita* $(Y, \|\cdot\|)$ *es* λ-**distorsionable** *si existe una norma* $|||\cdot|||$ *en* Y *equivalente a* $\|\cdot\|$ *tal que para todo subespacio de dimensión infinita* $Z \subset Y$

$$\sup\left\{\frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z, \|z_1\| = \|z_2\| = 1\right\} \geq \lambda.$$

Un espacio es **distorsionable** *si es* λ*-distorsionable para algún* $\lambda > 1$*, y es* **arbitrariamente distorsionable** *si es* λ*-distorsionable para todo* $\lambda > 1$*,*

Primero, veremos que existen espacios no distorsionables, un resultado probado por James [16].

Proposición 3.2 ℓ_1 *y* c_0 *no son distorsionables.*

Demostración. Consideremos el espacio ℓ_1 con su norma usual $\|\cdot\|$, y sea $|||\cdot|||$ una norma para ℓ_1 equivalente a $\|\cdot\|$. Luego, por la proposición 1.10, existe una constante $M > 0$ tal que $M^{-1}\,|||x||| \leq \|x\| \leq M\,|||x|||$ para toda $x \in \ell_1$. Sean $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones asociadas a la base canónica de ℓ_1 (véase la proposición 1.38), y para $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\lambda_n = \sup\{\|x\| : |||x||| = 1,\, P_n x = 0\}.$$

Claramente $\lambda_n \downarrow \lambda$ para algún $M \geq \lambda \geq M^{-1}$. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{n_0} < \lambda(1+\varepsilon)$. Veamos que podemos construir una base bloque $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ de la base canónica de ℓ_1 tal que para toda $k \in \mathbb{N}$, $|||y_k||| = 1$, $P_{n_0} y_k = 0$ y $\|y_k\| \geq \lambda/(1+\varepsilon)$.

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $X_m = [\mathbf{e}_i]_{i=m}^{\infty}$, donde $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base canónica de ℓ_1. Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \sup\left\{\frac{\|x\|}{|||x|||} : x \in X_{n+1} \setminus \{0\}\right\}.$$

Como la función $h : X_{n_0+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \|x\| \,/\, |||x|||$ es una función continua y $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{i=n_0+1}^{\infty} \setminus \{0\}$ es denso en $X_{n_0+1} \setminus \{0\}$, existe $y_1' \in \langle \mathbf{e}_i \rangle_{i=n_0+1}^{\infty} \setminus \{0\}$ tal que $\|y_1'\| \,/\, |||y_1'||| > \lambda_{n_0}/(1+\varepsilon) \geq \lambda/(1+\varepsilon)$. Tomando $y_1 = y_1'/\,|||y_1'|||$, obtenemos que $|||y_1||| = 1$, $P_{n_0}y_1 = 0$ y $\|y_1\| \geq \lambda/(1+\varepsilon)$. Como y_1 es una combinación lineal de un número finito de los $\mathbf{e}_i$, existe $n_1 > n_0$ tal que $P_{n_1}y_1 = 0$. Análogamente podemos encontrar $y_2 \in \langle \mathbf{e}_i \rangle_{i=n_1+1}^{\infty} \setminus \{0\}$ tal que $|||y_2||| = 1$, $P_{n_2}y_2 = 0$ y $\|y_2\| \geq \lambda/(1+\varepsilon)$. Procediendo inductivamente construimos una base bloque $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisface las condiciones pedidas.

Sean $Z_\varepsilon = [y_k]_{k=1}^{\infty}$ y $z_1, z_2 \in Z_\varepsilon$ con $\|z_1\| = \|z_2\| = 1$. De la definición de Z_ε, como $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base bloque de $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, existen escalares $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$ y $z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k$. Observemos que de la desigualdad del triángulo,

$$|||z_1||| = \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right|\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, |||y_k||| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Aparte,

$$1 = \|z_1\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, \|y_k\| \geq \frac{\lambda}{1+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

y así

$$|||z_1||| \leq \frac{1+\varepsilon}{\lambda}. \tag{3.1}$$

Por otro lado, claramente $P_{n_0}(z_2) = 0$, y entonces de la definición de λ_{n_0} se sigue que $\lambda_{n_0} \geq \|z_2\|/\,|||z_2||| = |||z_2|||^{-1}$, de donde

$$|||z_2|||^{-1} \leq \lambda_{n_0} \leq \lambda(1+\varepsilon). \tag{3.2}$$

Luego, de (3.1) y (3.2),

$$\frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} \leq \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\lambda(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)^2,$$

y por lo tanto

$$\sup\left\{\frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z_\varepsilon, \|z_1\| = \|z_2\| = 1\right\} \leq (1+\varepsilon)^2.$$

Como $\operatorname{ínf}_{\varepsilon>0}(1+\varepsilon)^2 = 1$, concluimos que ℓ_1 no es μ-distorsionable para ninguna $\mu > 1$, y entonces no es distorsionable.

La prueba para c_0 es similar. Por comodidad, consideraremos solamente valores de ε tales que $1 - 4\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$. Sea ahora

$$\lambda_n = \text{ínf}\{\|x\| : |||x||| = 1,\, P_n x = 0\}.$$

Usando un argumento análogo al empleado con ℓ_1, $\lambda_n \uparrow \lambda$ con $M \geq \lambda \geq M^{-1}$, y existen un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{n_0} > \lambda/(1+\varepsilon)$ y una base bloque $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ de la base canónica de c_0 tal que para toda $k \in \mathbb{N}$, $|||y_k||| = 1$, $P_{n_0} y_k = 0$ y $\|y_k\| \leq \lambda(1+\varepsilon)$.

Ahora sean $Z_\varepsilon = [y_k]_{k=1}^{\infty}$ y $z, z_1, z_2 \in Z_\varepsilon$ con $\|z_1\| = \|z_2\| = 1$. De la definición de Z_ε, como $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base bloque de $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, existen escalares $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k$, $z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k$ y $z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$. Claramente, $P_{n_0} z_1 = 0$, y entonces de la definición de λ_{n_0} se sigue que $\lambda_{n_0} \leq \|z_1\| / |||z_1||| = |||z_1|||^{-1}$, de donde

$$|||z_1||| \leq \lambda_{n_0}^{-1} < \frac{1+\varepsilon}{\lambda}. \tag{3.3}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} |||z||| &\leq \frac{1}{\lambda_{n_0}} \|z\| \leq \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \right\| = \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \sup_k |c_k| \, \|y_k\| \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \lambda(1+\varepsilon) \sup_k |c_k| = (1+\varepsilon)^2 \sup_k |c_k|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$1 = \|z_2\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \right\| = \sup_k |b_k| \, \|y_k\| \leq \lambda(1+\varepsilon) \sup_k |b_k|,$$

de donde $\sup_k |b_k| \geq \lambda^{-1}(1+\varepsilon)^{-1}$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_{k_0}| > (1-\varepsilon)\sup_k |b_k|$. De (3.4),

$$\left|\left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k - 2 b_{k_0} y_{k_0} \right|\right|\right| \leq (1+\varepsilon)^2 \sup_k |b_k|.$$

Luego, de la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |||z_2||| &= \left|\left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k \right|\right|\right| \geq |||2 b_{k_0} y_{k_0}||| - \left|\left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_k - 2 b_{k_0} y_{k_0} \right|\right|\right| \\ &\geq 2(1-\varepsilon) \sup_k |b_k| - (1+\varepsilon)^2 \sup_k |b_k| \\ &\geq \big(2(1-\varepsilon) - (1+\varepsilon)^2\big) \frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)} = (1 - 4\varepsilon - \varepsilon^2) \frac{1}{\lambda(1+\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Así, de (3.3) y (3.5),

$$\begin{aligned} \frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} &\leq \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1-4\varepsilon-\varepsilon^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-4\varepsilon-\varepsilon^2} = \frac{(1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon - \varepsilon^2 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}{1-4\varepsilon-\varepsilon^2} \\ &= 1 + \frac{6\varepsilon + 2\varepsilon^2}{1-4\varepsilon-\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sup\left\{\frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z_\varepsilon, \|z_1\| = \|z_2\| = 1\right\} \leq 1 + \frac{6\varepsilon + 2\varepsilon^2}{1 - 4\varepsilon - \varepsilon^2},$$

de donde concluimos que c_0 no es μ-distorsionable para ninguna $\mu > 1$ y por lo tanto no es distorsionable. ∎

Ahora probaremos que la propiedad de ser arbitrariamente distorsionable se preserva bajo isomorfismos.

Proposición 3.3 *Sean X y Y dos espacios normados isomorfos de dimensión infinita. Si X es arbitrariamente distorsionable, entonces Y también lo es.*

Demostración. Denotaremos por $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ a las normas de X y Y, respecivamente. Sea $T : X \to Y$ un isomorfismo. Entonces existe $K \geq 1$ tal que para toda $x \in X$,

$$\frac{1}{K}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X. \tag{3.6}$$

Sea $\lambda > 1$. Como X es arbitrariamente distorsionable, existe una norma $|||\cdot|||_X$ para X equivalente a $\|\cdot\|_X$ tal que para todo subespacio de dimensión infinita W de X,

$$\sup\left\{\frac{|||w_1|||_X}{|||w_2|||_X} : w_1, w_2 \in W, \|w_1\|_X = \|w_2\|_X = 1\right\} \geq K^2\lambda. \tag{3.7}$$

Definamos una función $|||\cdot|||_Y : Y \to \mathbb{R}$ por $|||y|||_Y = \left|\left|\left|T^{-1}y\right|\right|\right|_X$ para toda $y \in Y$. Claramente es una norma para Y, y es equivalente a $\|\cdot\|_Y$.

Ahora sea Z un subespacio de Y de dimensión infinita. Entonces $T^{-1}Z$ es un subespacio de dimensión infinita de X, y por (3.7), dado $\varepsilon > 0$ existen $x_1, x_2 \in T^{-1}Z$ tales que $\|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1$ y

$$\frac{|||x_1|||_X}{|||x_2|||_X} > K^2(\lambda - \varepsilon). \tag{3.8}$$

Sean $z_1 = Tx_1/\|Tx_1\|_Y$ y $z_2 = Tx_2/\|Tx_2\|_Y$. Observemos que $z_1, z_2 \in Z$ y $\|z_1\|_Y = \|z_2\|_Y = 1$. Ahora, por (3.6) y (3.8),

$$\frac{|||z_1|||_Y}{|||z_2|||_Y} = \frac{|||x_1|||_X}{|||x_2|||_X} \cdot \frac{\|Tx_2\|_Y}{\|Tx_1\|_Y} \geq \frac{|||x_1|||_X}{|||x_2|||_X} \cdot \frac{\frac{1}{K}\|x_2\|_X}{K\|x_1\|_X} > K^2(\lambda - \varepsilon) \cdot \frac{1}{K^2} = \lambda - \varepsilon,$$

de donde

$$\sup\left\{\frac{|||z_1|||_Y}{|||z_2|||_Y} : z_1, z_2 \in Z, \|z_1\|_Y = \|z_2\|_Y = 1\right\} \geq \lambda.$$

Por lo tanto, Y es λ-distorsionable, y entonces es arbitrariamente distorsionable. ∎

Como se mencionó en la introducción, hasta antes de la construcción del espacio de Schlumprecht solamente se sabía de la existencia de espacios distorsionables y no distorsionables, mas no de arbitrariamente distorsionables. En este capítulo definimos una clase de espacios que son una generalización del construido por Schlumprecht, a los que hemos llamado "los espacios de Schlumprecht" y probamos que algunos de ellos son arbitrariamente distorsionables, y no son isomorfos entre sí.

3.2. La clase $\mathscr{F}$ y sus propiedades

La definición de los espacios de Schlumprecht y las pruebas de varios resultados acerca de espacios de su tipo, se basan en las propiedades de ciertas funciones, que enunciaremos y probaremos en esta sección.

Definición 3.4 *La clase $\mathscr{F}$ consiste de las funciones $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ que satisfacen:*

(I) $f(1) = 1$ *y* $f(x) < x$ *para toda* $x > 1$.

(II) $f(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$.

(III) $\lim_{x\to\infty} x^{-q} f(x) = 0$ *para toda* $q > 0$.

(IV) *La función* $x/f(x)$ *es cóncava.*

(V) f *es submultiplicativa, es decir,* $f(xy) \leq f(x)f(y)$ *para cualesquiera* $x, y \geq 1$.

(VI) *La derivada por la derecha de* f *en* 1 *es positiva.*

Primero veamos que las primeras cinco condiciones implican que f y $x/f(x)$ son crecientes, y que la derivada mencionada en (VI) existe.

Proposición 3.5 *Sea $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ que satisface las condiciones* (I) *a* (V) *de la definición* 3.4*. Entonces f y $x/f(x)$ son estrictamente crecientes.*

Demostración. Sea $y > 1$. Supongamos que $f(y) = 1$. Entonces, por (V)

$$1 \leq f(y^2) \leq f(y)f(y) = 1,$$

de donde $f(y^2) = 1$. Razonando inductivamente, $f(y^{2^n}) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice (II). Ahora, sean $1 < x < y$. Entonces existe $0 < \lambda < 1$ tal que $x = \lambda + (1-\lambda)y$. Por (IV),

$$\frac{x}{f(x)} \geq \lambda + (1-\lambda)\frac{y}{f(y)},$$

de donde

$$f(x) \leq \frac{x}{\lambda + (1-\lambda)\frac{y}{f(y)}} = f(y)\frac{\lambda + (1-\lambda)y}{\lambda f(y) + (1-\lambda)y}.$$

Como $f(y) > 1$ y $\lambda > 0$, $\lambda + (1-\lambda)y < \lambda f(y) + (1-\lambda)y$, y entonces $f(x) < f(y)$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente.

Sean $1 \leq x < y$. Entonces $1 < y/x$, de donde, por (V)

$$f(y) = f\left(\frac{y}{x}x\right) \leq f\left(\frac{y}{x}\right) f(x),$$

y por lo tanto, por (I),

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq f\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y}{x}.$$

Luego,

$$\frac{x}{f(x)} < \frac{y}{f(y)},$$

y por tanto la función $x/f(x)$ es estrictamente creciente. ■

Proposición 3.6 *Sea $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ que satisface las condiciones* (I) *a* (V) *de la definición* 3.4. *Definamos $F : [1,\infty) \to [1,\infty)$ por $F(x) = x/f(x)$ para $x \in [1,\infty)$. Entonces:*

(I) *Para toda $x \geq 1$ existen $f'(x)$ y $F'(x)$, las derivadas por la derecha en x de f y F, respectivamente.*

(II) *Para toda $x \geq 1$, $F'(x) = \sup_{h>0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.*

(III) $1 \geq f'(1) \geq 0$.

Demostración. Observemos que para (I) basta comprobar que F' existe, puesto que $f(x) = x/F(x)$. Para ello recordemos que de la definición de $\mathscr{F}$, F es cóncava, y por la proposición 3.5 F y f son estrictamente crecientes. Sean $x \geq 1$ y $h > 0$. Entonces $f(x) - f(x+h) \leq 0$, y

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\frac{x+h}{f(x+h)} - \frac{x}{f(x)}\right] = \frac{xf(x)+hf(x)-xf(x+h)}{hf(x)f(x+h)} \\ &= \frac{x\big(f(x)-f(x+h)\big)+hf(x)}{hf(x)f(x+h)} \leq \frac{hf(x)}{hf(x)f(x+h)} = \frac{1}{f(x+h)} \leq \frac{1}{f(x)}.\end{aligned}$$

Ahora sean $0 < h < H$. De la condición de concavidad, si α es tal que $\alpha x + (1-\alpha)(x+H) = x+h$ entonces $\alpha x + x + H - \alpha x - \alpha H = x+h$, y $\alpha = (H-h)/H$. Por la concavidad de F,

$$F(x+h) \geq \alpha F(x) + (1-\alpha)F(x+H).$$

De donde tenemos que

$$F(x+h) \geq \frac{H-h}{H}F(x) + \frac{h}{H}F(x+H),$$

y por lo tanto

$$H\big[F(x+h)-F(x)\big] \geq h\big[F(x+H)-F(x)\big],$$

es decir,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \geq \frac{F(x+H)-F(x)}{H}.$$

Así, para $h > 0$ la función $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ es no creciente (como función de h) y está acotada por arriba por $1/f(x)$, y por lo tanto existe

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \sup_{h>0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) \leq \frac{1}{f(x)}.$$

Por otro lado,

$$f'(1) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{1+h-1}{h} = 1.$$

y además,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \geq 0,$$

puesto que f es creciente. ■

Ahora probaremos que la clase $\mathscr{F}$ es no vacía.

Proposición 3.7 *La función $\tilde{f}(x) = \log_2(x+1)$ pertenece a la clase $\mathscr{F}$.*

Demostración. Verifiquemos que satisface las propiedades:

(I) $\tilde{f}(1) = \log_2(1+1) = \log_2 2 = 1$. Por otro lado, como $e < 4$, resulta

$$1 = \ln e < \ln 4 = 2 \ln 2.$$

Y entonces, para $x > 1$, $1 < (x+1) \ln 2$, es decir, $[(x+1) \ln 2]^{-1} < 1$. Luego, integrando, para $x > 1$,

$$\tilde{f}(x) - 1 = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2} - \frac{\ln(1+1)}{\ln 2} = \int_1^x [(t+1) \ln 2]^{-1} \, dt < \int_1^x 1 \, dt = x - 1,$$

y por lo tanto, $\tilde{f}(x) < x$.

(II) Claramente, $\lim_{x \to \infty} \tilde{f}(x) = \infty$.

(III) Es bien sabido que $\lim_{x \to \infty} x^{-q} \ln x = 0$ para cualquier $q > 0$. Por lo tanto, $\lim_{x \to \infty} x^{-q} \tilde{f}(x) = 0$ para toda $q > 0$.

(IV) Calculamos

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\tilde{f}(x)} = \ln 2 \frac{d}{dx} \frac{x}{\ln(x+1)} = \ln 2 \frac{\ln(x+1) - x/(x+1)}{[\ln(x+1)]^2} = \ln 2 \frac{(x+1) \ln(x+1) - x}{(x+1)[\ln(x+1)]^2}.$$

Ahora bien, para $x \geq 0$ se tiene

$$\frac{d}{dx}\big((x+1) \ln(x+1) - x\big) = \frac{x+1}{x+1} + \ln(x+1) - 1 = \ln(x+1) \geq 0, \tag{3.9}$$

por lo tanto, puesto que $(0+1) \ln(0+1) - 0 = 0$, para $x \geq 0$ resulta

$$(x+1) \ln(x+1) - x \geq 0. \tag{3.10}$$

Por otro lado, usando (3.9), $\frac{d}{dx}\big((x+1)\ln(x+1)-x\big)=\ln(x+1)$ y entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\frac{x}{\tilde f(x)} &= \frac{\ln 2}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^4}\Bigg((x+1)[\ln(x+1)]^2\,[\ln(x+1)]\\ &\qquad -[(x+1)\ln(x+1)-x]\left[(x+1)\frac{2\ln(x+1)}{x+1}+[\ln(x+1)]^2\right]\Bigg)\\ &= \frac{\ln 2}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^3}\Bigg((x+1)[\ln(x+1)]^2\\ &\qquad\qquad -[(x+1)\ln(x+1)-x]\,[2+\ln(x+1)]\Bigg)\\ &= \frac{\ln 2}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^3}\Big(-2(x+1)\ln(x+1)+2x+x\ln(x+1)\Big)\\ &= \ln 2\,\frac{2x-(x+2)\ln(x+1)}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^3}.\end{aligned}$$

Observemos que $2\cdot 0-(0+2)\ln(0+1)=0$, y además, por (3.10), si $x\geq 0$,

$$\frac{d}{dx}\big(2x-(x+2)\ln(x+1)\big)=2-\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\leq 0.$$

Por lo tanto, si $x\geq 0$ tenemos que

$$2x-(x+2)\ln(x+1)\leq 0, \tag{3.11}$$

y entonces para $x\geq 1$ se tiene que $\frac{d^2}{dx^2}\frac{x}{\tilde f(x)}\leq 0$, de donde concluimos que $\frac{x}{\tilde f(x)}$ es cóncava.

(v) Consideremos $x\geq 1$ fijo. Sea $g(y)=\tilde f(xy)-\tilde f(x)\tilde f(y)$. Observemos que para $y\geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}g(y)=x\tilde f'(xy)-\tilde f(x)\tilde f'(y) &= \frac{x}{(xy+1)\ln 2}-\frac{\ln(x+1)}{\ln 2}\frac{1}{(y+1)\ln 2}\\ &= (\ln 2)^{-2}\left(\frac{x\ln 2}{xy+1}-\frac{\ln(x+1)}{y+1}\right)\\ &= (\ln 2)^{-2}\left(\frac{x(y+1)\ln 2-(xy+1)\ln(x+1)}{(xy+1)(y+1)}\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sea $h(y)=x(y+1)\ln 2-(xy+1)\ln(x+1)$. Observemos que para $y\geq 1$,

$$\frac{d}{dy}h(y)=x\ln 2-x\ln(x+1)=x\big(\ln 2-\ln(x+1)\big)\leq 0. \tag{3.13}$$

Ahora evaluamos $h(1)=(2\ln 2)x-(x+1)\ln(x+1)$. Observemos que $(2\ln 2)\cdot 1-(1+1)\ln(1+1)=0$, y para $t\geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big((2\ln 2)t-(t+1)\ln(t+1)\big) &= 2\ln 2-(t+1)\frac{1}{t+1}-\ln(t+1)\\ &= 2\ln 2-1-\ln(t+1)\\ &\leq 2\ln 2-1-\ln 2=\ln 2-1<0,\end{aligned}$$

y por lo tanto $(2\ln 2)t - (t+1)\ln(t+1) \leq 0$ para cualquier $t \geq 1$. En particular, $h(1) \leq 0$. Por lo tanto, por (3.13), $h(y) \leq 0$ para cualquier $y \geq 1$. Luego, por (3.12), $\frac{d}{dy}g(y) \leq 0$ para cualquier $y \geq 1$. Como $g(1) = 0$ para toda $x \geq 1$, concluimos que $g(y) \leq 0$ para cualquier $y \geq 1$. Por lo tanto, $\tilde{f}(xy) \leq \tilde{f}(x)\tilde{f}(y)$ para cualesquiera $x, y \geq 1$.

(VI) $\tilde{f}'(1) = [(1+1)\ln 2]^{-1} > 0$.

Por lo tanto, $\tilde{f} \in \mathscr{F}$. ∎

La siguiente proposición nos permite construir una infinidad de funciones en la clase $\mathscr{F}$ a partir de $\tilde{f}$.

Proposición 3.8 *$\tilde{f}^p \in \mathscr{F}$ para $0 < p < 1$.*

Demostración. Sea $0 < p < 1$. Entonces:

(I) $[\tilde{f}(1)]^p = 1^p = 1$ y para $x > 1$, $1 < \tilde{f}(x) < x$ y por lo tanto $[\tilde{f}(x)]^p < x^p < x$.

(II) Como $\tilde{f}(x)$ tiende a infinito cuando $x \to \infty$, $[\tilde{f}(x)]^p$ también.

(III) Para $x \geq 1$ y $q > 0$ tenemos $0 \leq x^{-q}[\tilde{f}(x)]^p \leq x^{-q}\tilde{f}(x)$ (puesto que $\tilde{f}(x) \geq 1$). Por lo tanto, del lema del sándwich, $\lim_{x\to\infty} x^{-q}[\tilde{f}(x)]^p = 0$.

(IV) Consideremos $x \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{x}{[\tilde{f}(x)]^p} &= [\ln 2]^p \frac{d}{dx}\frac{x}{[\ln(x+1)]^p} = [\ln 2]^p \frac{[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)]^{2p}} \\ &= [\ln 2]^p \frac{(x+1)[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}}{(x+1)[\ln(x+1)]^{2p}}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}\right) = [\ln(x+1)]^p \\ &\quad + (x+1)p[\ln(x+1)]^{p-1}\tfrac{1}{x+1} - p[\ln(x+1)]^{p-1} - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\tfrac{1}{x+1} \\ &\quad = [\ln(x+1)]^p - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\tfrac{1}{x+1} \\ &\quad = \tfrac{1}{x+1}\left((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\right).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Luego, de (3.14) y (3.15), si $C(x) = [\ln 2]^p / \big[(x+1)[\ln(x+1)]^{2p}\big]^2$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\frac{x}{[\tilde{f}(x)]^p} = \\
&\quad = C(x)\Big(\tfrac{1}{x+1}\big((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\big)(x+1)[\ln(x+1)]^{2p} \\
&\qquad - \big([\ln(x+1)]^{2p} + (x+1)2p[\ln(x+1)]^{2p-1}\tfrac{1}{x+1}\big) \\
&\qquad\qquad \big((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}\big)\Big) \\
&\quad = C(x)\Big(\big((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\big)[\ln(x+1)]^{2p} \\
&\qquad - \big([\ln(x+1)]^{2p} + 2p[\ln(x+1)]^{2p-1}\big)\big((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}\big)\Big) \\
&\quad = C(x)\Big([\ln(x+1)]^{2p}\big(xp[\ln(x+1)]^{p-1} - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{p-2}\big) \\
&\qquad - 2p[\ln(x+1)]^{2p-1}\big((x+1)[\ln(x+1)]^p - xp[\ln(x+1)]^{p-1}\big)\Big) \\
&\quad = C(x)\Big(xp[\ln(x+1)]^{3p-1} - xp(p-1)[\ln(x+1)]^{3p-2} \\
&\qquad - 2p(x+1)[\ln(x+1)]^{3p-1} + 2xp^2[\ln(x+1)]^{3p-2}\Big) \\
&\quad = C(x)\Big(\big(xp - 2p(x+1)\big)[\ln(x+1)]^{3p-1} + \big(2xp^2 - xp(p-1)\big)[\ln(x+1)]^{3p-2}\Big) \\
&\quad = C(x)\big(-p(x+2)[\ln(x+1)]^{3p-1} + xp(p+1)[\ln(x+1)]^{3p-2}\big) \\
&\quad = C(x)p[\ln(x+1)]^{3p-2}\big(x(p+1) - (x+2)[\ln(x+1)]\big) \\
&\quad = \frac{p[\ln 2]^p}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^{p+2}}\big(x(p+1) - (x+2)[\ln(x+1)]\big).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Observemos que $\frac{p[\ln 2]^p}{(x+1)^2[\ln(x+1)]^{p+2}} > 0$, y por (3.11),

$$x(p+1) - (x+2)[\ln(x+1)] \leq 2x - (x+2)\ln(x+1) \leq 0.$$

Por lo tanto $\frac{d^2}{dx^2}\frac{x}{[\tilde{f}(x)]^p} \leq 0$, y entonces $x/[\tilde{f}(x)]^p$ es cóncava.

(V) De $\tilde{f}(xy) \leq \tilde{f}(x)\tilde{f}(y)$ para cualesquiera $x, y \geq 1$ se sigue que

$$[\tilde{f}(xy)]^p \leq \big[\tilde{f}(x)\tilde{f}(y)\big]^p = [\tilde{f}(x)]^p[\tilde{f}(y)]^p$$

para cualesquiera $x, y \geq 1$.

(VI) Calculamos

$$\frac{d}{dx}[\tilde{f}(x)]^p = \frac{d}{dx}\frac{[\ln(x+1)]^p}{[\ln 2]^p} = \frac{1}{[\ln 2]^p}p[\ln(x+1)]^{p-1}\frac{1}{x+1},$$

de donde la derivada por la derecha de $\tilde{f}^p$ en 1 es $\frac{1}{[\ln 2]^p}p[\ln(1+1)]^{p-1}\frac{1}{1+1} = \frac{p}{2\ln 2} > 0$.

Por lo tanto, $\tilde{f}^p \in \mathscr{F}$. ∎

Ahora probaremos dos resultados técnicos.

Proposición 3.9 *Sean f y F como en la proposición 3.6. Entonces para cualesquiera $0 \leq t < 1$ y $\lambda \geq 1$ se tiene que*

$$(1-t)F\Big(\frac{\lambda}{1-t}\Big) + t\big(F(1) - F'(1)\big) \leq F(\lambda).$$

Además, para el caso límite $t = 1$ tenemos que $F(1) - F'(1) \leq F(\lambda)$.

Demostración. Primero consideraremos solamente el caso $0 \leq t < 1$. Como F es una función cóncava, tenemos que

$$\tfrac{t}{t+\lambda-1}F(1) + \tfrac{\lambda-1}{t+\lambda-1}F(\lambda+t) \leq F\big(\tfrac{t}{t+\lambda-1} + (\lambda+t)\tfrac{\lambda-1}{t+\lambda-1}\big) = F\big(\tfrac{t+\lambda^2-\lambda+t\lambda-t}{t+\lambda-1}\big) = F(\lambda), \quad (3.17)$$

que

$$\begin{aligned} \tfrac{t}{t+\lambda-1}F(\lambda+t) + \tfrac{\lambda-1}{t+\lambda-1}F(1) &\leq F\big(\tfrac{t(\lambda+t)}{t+\lambda-1} + \tfrac{\lambda-1}{t+\lambda-1}\big) = F\big(\tfrac{t\lambda+t^2+\lambda-1}{t+\lambda-1}\big) \\ &= F\big(\tfrac{t\lambda+t^2-t+t+\lambda-1}{t+\lambda-1}\big) = F(t+1), \end{aligned} \quad (3.18)$$

y que

$$(1-t)F\Big(\frac{\lambda}{1-t}\Big) + tF(1) \leq F(\lambda+t). \quad (3.19)$$

Luego, sumando (3.17) y (3.18), como $F(1) = 1$ y por (II) de la proposición 3.6,

$$\begin{aligned} F(\lambda+t) &\leq F(\lambda) - \tfrac{t}{t+\lambda-1} + F(t+1) - \tfrac{\lambda-1}{t+\lambda-1} = F(\lambda) + F(t+1) - 1 \\ &= F(\lambda) + t\tfrac{F(t+1)-F(1)}{t} \leq F(\lambda) + tF'(1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

De (3.19) y (3.20) obtenemos

$$(1-t)F\Big(\frac{\lambda}{1-t}\Big) + t\big(F(1) - F'(1)\big) \leq F(\lambda), \quad (3.21)$$

la desigualdad buscada.

De la definición de F,

$$(1-t)F\Big(\frac{\lambda}{1-t}\Big) = (1-t)\frac{\lambda}{1-t}\frac{1}{f\big(\frac{\lambda}{1-t}\big)} = \frac{\lambda}{f\big(\frac{\lambda}{1-t}\big)}.$$

De la condición (II) en la definición 3.4,

$$\lim_{t\to 1} \frac{\lambda}{f(\frac{\lambda}{1-t})} = 0.$$

Como además $\lim_{t\to 1} t\big(F(1) - F'(1)\big) = F(1) - F'(1)$, de (3.21) se sigue que $F(1) - F'(1) \leq F(\lambda)$. ∎

Proposición 3.10 *Sea $G : [1,\infty) \to [1,\infty)$ una función cóncava, no decreciente y supermultiplicativa, que además satisface $G(x) \leq x$ para toda $x \in [1,\infty)$ y que $g(x) = x/G(x)$ es no decreciente. Extendamos G a todo $\mathbb{R}_+$ por $G(x) = x$ cuando $0 \leq x \leq 1$ Entonces la extensión también es cóncava, no decreciente y supermultiplicativa.*

Demostración. Como G es no decreciente en $[1,\infty)$, claramente lo es en $\mathbb{R}_+$. Además, es cóncava en $[0,1]$ y en $[1,\infty)$. Ahora, sean $0 \leq x \leq 1$, $y > 1$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Tenemos dos casos:

(1) Si $\alpha x + (1-\alpha)y \leq 1$ tenemos que

$$G\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) = \alpha x + (1-\alpha)y \geq \alpha x + (1-\alpha)G(y) = \alpha G(x) + (1-\alpha)G(y). \quad (3.22)$$

(2) Si $\alpha x+(1-\alpha)y \geq 1$, observemos que $\alpha x+(1-\alpha)y = \beta+(1-\beta)y$ para $\beta = \alpha(y-x)/(y-1)$. Claramente $\beta \geq 0$ puesto que $\alpha \geq 0$ y $y > 1 \geq x$. Además, como $\alpha x + (1-\alpha)y \geq 1$, $\alpha(y-x) \leq y-1$ y entonces $\beta = \alpha(y-x)/(y-1) \leq 1$.

Por lo tanto,

$$G\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) = G\big(\beta + (1-\beta)y\big) \geq \beta + (1-\beta)G(y). \quad (3.23)$$

Por otro lado, como $y \geq G(y)$, entonces $(1-x)(y-x) \geq (1-x)(G(y)-x)$, de donde

$$\begin{aligned} 1 &\geq x + (1-x)(G(y)-x)/(y-x) = x\big[1-(1-x)/(y-x)\big] + G(y)(1-x)/(y-x) \\ &= x(y-1)/(y-x) + G(y)[1-(y-1)/(y-x)] = x\alpha/\beta + G(y)(1-\alpha/\beta). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Luego, usando (3.24)

$$\begin{aligned} \beta + (1-\beta)G(y) &\geq \beta\big[x\alpha/\beta + G(y)(1-\alpha/\beta)\big] + (1-\beta)G(y) \\ &= \alpha x + G(y)(\beta-\alpha) + (1-\beta)G(y) \\ &= \alpha x + (1-\alpha)G(y) = \alpha G(x) + (1-\alpha)G(y). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A partir de (3.22), (3.23) y (3.25) concluimos que G es cóncava en todo $\mathbb{R}_+$.

También es claro que $G(xy) \geq G(x)G(y)$ si $x, y \geq 1$ o $x, y \leq 1$. Consideremos ahora el caso $x \leq 1$ y $y \geq 1$. Si $xy \leq 1$, entonces

$$G(xy) = xy = G(x)y \geq G(x)G(y).$$

Por otro lado, si $xy \geq 1$, dado que $g(x) = x/G(x)$ es no decreciente y como $xy \leq y$,

$$G(xy) = xy/g(xy) \geq xy/g(y) = G(x)G(y).$$

Por lo tanto, $G(xy) \geq G(x)G(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}_+$. ∎

3.3. Construcción de los espacios

En esta sección definiremos una familia de espacios que incluye al espacio construido por Schlumprecht en[24], así como a los que hemos llamado "los espacios de Schlumprecht". Antes de pasar a la definición, iniciemos con un poco de notación.

Definición 3.11 (I) *Sea*

$$c_{00} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K}\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ y\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0\, \forall\, n \geq N \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{e}_n = \{x_n^m\}_{m=1}^{\infty} \in c_{00}$ dado por

$$x_n^m = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

(II) *Si $E \subset \mathbb{N}$, también utilizaremos la letra E para la proyección de c_{00} en c_{00} definida por $E(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i \in E} a_i \mathbf{e}_i$ (esto está bien definido porque cada suma de este tipo tiene solamente un número finito de sumandos distintos de cero, y cada vector tiene una representación única porque los $\mathbf{e}_i$ forman una base de Hamel de c_{00}).*

(III) *Sean $E, F \subset \mathbb{N}$. Si $E, F \neq \emptyset$, $E < F$ quiere decir que $\max E < \min F$. Si $k \in \mathbb{N}$ y $E \subset \mathbb{N}$ entonces $k < E$ quiere decir que $k < \min E$.*

(IV) *El* **soporte** *de un vector $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i \in c_{00}$ es el conjunto $\operatorname{sop}(x) = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$.*

(V) *Un* **intervalo** *de enteros es un subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{i \in \mathbb{N} : a \leq i \leq b\}$ para algunos $a, b \in \mathbb{N}$. Definimos el* **rango** *de un vector $x \in c_{00}$, escrito $\operatorname{ran}(x)$, como el intervalo más pequeño que contiene a su soporte.*

(VI) *Para $x, y \in c_{00}$, escribiremos $x < y$ para indicar que existen naturales $n_1 \leq m_1 < n_2 \leq m_2$ y escalares $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{m_1}$ y $b_{n_2}, b_{n_2+1}, \ldots, b_{m_2}$ tales que $x = \sum_{i=n_1}^{m_1} a_i \mathbf{e}_i$ y $y = \sum_{i=n_2}^{m_2} b_i \mathbf{e}_i$. Si $x_1, \ldots, x_n \in c_{00}$ y $x_1 < \cdots < x_n$, diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son* **sucesivos***.*

Definición 3.12 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Denotaremos por S_f al espacio c_{00} con la norma $\|\cdot\|$ definida implícitamente por la ecuación*

$$\|x\| = \|x\|_{\infty} \vee \sup \left\{ f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ intervalos} \right\}. \qquad (*)$$

para toda $x \in c_{00}$. El espacio $\bar{S}_f$ es la completación de S_f. El espacio construido originalmente por Schlumprecht en [24] es el caso particular de $\tilde{f}(x) = \log_2(x+1)$, al que denotaremos simplemente por $S = S_{\tilde{f}}$ y $\bar{S} = \bar{S}_{\tilde{f}}$.

Aunque $\|\cdot\|$ claramente depende de f, por simplicidad la notación no hace énfasis en ello. Siempre será claro a cuál f nos estamos refiriendo en cada caso. El que $(*)$ defina implícitamente una norma quiere decir que existe una única norma sobre c_{00} que satisface $(*)$. Esto será probado en la proposición 3.14.

Observación 3.13 Observemos que una vez fijado un $x \in c_{00}$, ya no necesitamos considerar el supremo sobre todos los $N \geq 2$, sino solamente algunos. Supongamos que $|\operatorname{sop}(x)| = n$, y sea $N > \text{máx}\{n, 2\}$. Entonces, para cualesquiera intervalos $E_1 < \cdots < E_N$, a lo más n de las proyecciones $E_i x$ serán distintas de cero. Digamos que las proyecciones distintas de $E_{j_1}x, \ldots, E_{j_k}x$ (con $2 \leq k \leq \text{máx}\{n, 2\}$) son todas cero. Luego,

$$\sum_{i=1}^{k} \|E_{j_i}x\| = \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\|,$$

y como f es estrictamente creciente,

$$f(k)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \|E_{j_i}x\| > f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\|.$$

Por lo tanto, el supremo sobre $N \geq 2$ y $E_1 < \cdots < E_N$ es el mismo si nos restringimos a $2 \leq N \leq \text{máx}\{n, 2\}$ y $E_1 < \cdots < E_N \leq m$, donde $m = \text{máx} \operatorname{sop}(x)$. Así, el supremo en realidad es un máximo, puesto que al restringir los valores de N del modo que ya mencionamos, solamente hay un número finito de sumas del tipo requerido.

Ahora sí, pasemos a probar que $(*)$ determina una norma en c_{00}:

Proposición 3.14 *La definición* 3.12 *efectivamente define una norma en* c_{00}.

Demostración. Sean $\|\cdot\|$ una norma sobre c_{00} y $0 \neq x \in c_{00}$. Si $E \subset \mathbb{N}$ es un intervalo tal que $Ex = x$ y $N \geq 2$, entonces, dado que $f(N) > f(1) = 1$,

$$f(N)^{-1} \|Ex\| = f(N)^{-1} \|x\| < \|x\|.$$

Por lo tanto, $(*)$ es equivalente a

$$\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup \left\{ \frac{1}{f(N)} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\| : N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ intervalos, } E_i x \neq x,\ 1 \leq i \leq N \right\}, \tag{$**$}$$

que utilizaremos de ahora en adelante.

Si para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotamos

$$c_{00}^n = \{x \in c_{00} : |\operatorname{sop}(x)| \leq n\},$$

es importante notar que si $\|\cdot\|$ es una norma sobre c_{00} que satisface $(**)$ para toda $x \in c_{00}$, sus valores en c_{00}^n determinan unívocamente sus valores en c_{00}^{n+1}.

Sean $\|\cdot\|$ una norma sobre c_{00} que satisface $(**)$ para toda $x \in c_{00}$ y $x \in c_{00}^1$. Entonces, $x = a\mathbf{e}_i$ para algún escalar a y un índice $i \in \mathbb{N}$. Luego, $Ex = x$ o $Ex = 0$ para todo intervalo $E \subset \mathbb{N}$. Por lo tanto, el supremo en $(**)$ es cero, y la ecuación se reduce a $\|x\| = \|x\|_\infty$. De estos dos últimos párrafos se sigue que si existe una norma sobre c_{00} que satisfaga $(**)$ para toda $x \in c_{00}$, entonces ésta es única.

Ahora definiremos inductivamente una norma en c_{00} que satisface $(**)$, como sigue: si $x \in c_{00}^1$, sea $\|x\| = \|x\|_\infty$; una vez definida $\|\cdot\|$ sobre c_{00}^n, extendemos sus valores a c_{00}^{n+1} mediante $(**)$. A continuación probaremos que esto tiene sentido y define una norma.

(I) Primero mostraremos que está bien definida, es decir, toma solamente valores finitos. Para ello probaremos por inducción sobre $|\operatorname{sop}(x)|$ que $\|x\| \leq |\operatorname{sop}(x)|\,\|x\|_\infty$ Para $|\operatorname{sop}(x)| \leq 1$, es claro. Ahora supongamos que para un cierto $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\|y\| \leq |\operatorname{sop}(y)|\,\|y\|_\infty$ siempre que $|\operatorname{sop}(y)| \leq n$. Sea $x \in c_{00}$ tal que $|\operatorname{sop}(x)| = n+1$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x\|_\infty \vee \sup\Bigg\{ \frac{1}{f(N)} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| :& \\ & N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ intervalos, } E_i x \neq x,\ 1 \leq i \leq N \Bigg\}.\end{aligned}$$

Si $E_1 < \cdots < E_N$ es cualquiera de las sucesiones de intervalos consideradas para el supremo, claramente $|\operatorname{sop}(E_i x)| \leq n$ para $1 \leq i \leq N$, y por lo tanto, por la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned} f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| &\leq f(1)^{-1} \sum_{i=1}^N |\operatorname{sop}(E_i x)|\,\|E_i x\|_\infty \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^N |\operatorname{sop}(E_i x)| \leq (n+1)\,\|x\|_\infty . \end{aligned}$$

Luego,

$$\|x\| \leq \|x\|_\infty \vee (n+1)\,\|x\|_\infty = (n+1)\,\|x\|_\infty .$$

Así, hemos probado que $\|x\| \leq |\operatorname{sop}(x)|\,\|x\|_\infty$ para toda $x \in c_{00}$, lo cual muestra que $\|\cdot\|$ está bien definida.

(II) $\|x\| \geq 0$ para toda $x \in c_{00}$, puesto que $\|x\|_\infty \geq 0$. Además, si $\|x\| = 0$ entonces $\|x\|_\infty = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

(III) Sean $x \in c_{00}$ y λ un escalar. Utilizaremos nuevamente inducción sobre $|\operatorname{sop}(x)|$. Si $|\operatorname{sop}(x)| \leq 1$, entonces claramente $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Ahora supongamos que esta propiedad se cumple siempre que $|\operatorname{sop}(x)| \leq n$, y sea x tal que $|\operatorname{sop}(x)| = n+1$. Si $E_1 < \cdots E_N$ son como en (I), $|\operatorname{sop}(E_i x)| \leq n$ para $1 \leq i \leq N$ y entonces

$$f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i(\lambda x)\| = f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|\lambda E_i x\| = |\lambda| f(N)^{-1} \sum_{i=1}^N \|E_i x\| ,$$

de donde se sigue que $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, puesto que $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_\infty$.

(IV) Sean $x, y \in c_{00}$. Para probar la desigualdad del triángulo, utilizaremos inducción sobre $|\operatorname{sop}(x+y)|$. Si $|\operatorname{sop}(x+y)| = 1$, entonces $x+y = a\mathbf{e}_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y un escalar a. Tomando $F = \{i\}$, entonces $Fx = b\mathbf{e}_i$ y $Fy = c\mathbf{e}_i$ para ciertos escalares b y c. Luego,

$$\|x+y\| = \|a\mathbf{e}_i\| = |a| = |b+c| \leq |b| + |c| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \leq \|x\| + \|y\| .$$

Supongamos ahora que la desigualdad es cierta cuando $|\operatorname{sop}(x+y)| \leq n$, y ahora consideremos el caso $|\operatorname{sop}(x+y)| = n+1$. Una vez más, de la definición,

$$\begin{aligned} \|x+y\| = \|x+y\|_\infty \vee \sup \Big\{ \frac{1}{f(N)} \sum_{i=1}^{N} \|E_i(x+y)\| : \\ N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ intervalos, } E_i(x+y) \neq x+y,\, 1 \leq i \leq N \Big\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Si $E_1 < \cdots < E_N$ es cualquiera de las sucesiones de intervalos consideradas para el supremo, claramente $|\operatorname{sop}(E_i(x+y))| \leq n$. Así, usando la hipótesis inductiva para cada término $\|E_i(x+y)\|$, obtenemos, entendiendo que los supremos son sobre las mismas sucesiones de intervalos que en (3.26),

$$\begin{aligned} \sup f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i(x+y)\| &\leq \sup f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} (\|E_i x\| + \|E_i y\|) \\ &\leq \sup f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i x\| \\ &\quad\quad + \sup f(N)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \|E_i y\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| . \end{aligned}$$

Además, de la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \leq \|x\| + \|y\| .$$

De ambas desigualdades y la definición de $\|\cdot\|$ se sigue que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, con lo cual queda probada la desigualdad del triángulo.

Y así, hemos probado que $\|\cdot\|$ es la única norma en c_{00} que satisface $(*)$. ■

Observación 3.15 Es importante notar que, por la manera en la que está definida la norma, para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^m$ y cualquier sucesión de naturales $n_1 < \cdots < n_m$, $\|\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_i\| = \|\sum_{i=1}^m a_i \mathbf{e}_{n_i}\|$.

La colección $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^\infty$ resulta tener propiedades interesantes, como lo precisa la siguiente proposición.

Proposición 3.16 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Entonces $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^\infty$ es una base monótona normalizada y 1-incondicional de $\bar{S}_f$.*

Demostración. De la definición inductiva de la norma dada en la demostración de 3.14, $\|\mathbf{e}_i\| = 1$. Observemos que $\mathbf{e}_i \neq 0$ para $i \in \mathbb{N}$, y el subespacio cerrado generado por los $\mathbf{e}_i$ es $\bar{S}_f$. Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$, tenemos que $\|\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mathbf{e}_i\right\|$, esto porque la desigualdad se cumple con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y porque cualquier suma del tipo $f(N)^{-1}\sum_{j=1}^N \|E_j(\cdot)\|$ para $\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i$ lo es también para $\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mathbf{e}_i$. Por lo tanto, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^\infty$ es una base monótona normalizada para $\bar{S}_f$ por el teorema 1.40.

Ahora, sea ε un escalar de módulo a lo más 1. Entonces, para cualquier escalar a, claramente $\|\varepsilon a\mathbf{e}_1\| \le \|a\mathbf{e}_1\|$. Ahora supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$, para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^n$ y toda sucesión de escalares $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ de módulo a lo más 1, se tiene la desigualdad $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\mathbf{e}_i\| \le \|\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i\|$. Consideremos ahora una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ y una sucesión de escalares $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n+1}$ de módulo a lo más 1. Sean $x = \sum_{i=1}^{n+1} a_i\mathbf{e}_i$ y $x_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i a_i\mathbf{e}_i$. Entonces

$$\|x_\varepsilon\| = \|x_\varepsilon\|_\infty \vee \sup_{N\ge 2} f(N)^{-1}\sum_{j=1}^N \|E_j x_\varepsilon\|.$$

Ahora, por la misma razón que antes, para el supremo basta con considerar sumas en las cuales al menos dos de las proyecciones son distintas de cero. Entonces, las proyecciones distintas de cero tendrán soporte de tamaño a lo más n, y por la observación 3.15, la condición $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\mathbf{e}_i\| \le \|\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_i\|$ implica que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\mathbf{e}_{n_i}\| \le \|\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{e}_{n_i}\|$ donde los n_i son una sucesión creciente de naturales. Así pues, usando esta consecuencia de la hipótesis inductiva,

$$\|x_\varepsilon\| = \|x_\varepsilon\|_\infty \vee \sup_{N\ge 2} f(N)^{-1}\sum_{j=1}^N \|E_j x_\varepsilon\| \le \|x\|_\infty \vee \sup_{N\ge 2} f(N)^{-1}\sum_{j=1}^N \|E_j x\| = \|x\|,$$

lo cual prueba, por el teorema 1.54, que la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^\infty$ es 1-incondicional. ■

3.4. Propiedades de los espacios

Ahora probaremos varios lemas acerca de estos espacios. Como ya mencionamos, son esencialmente debidos a Schlumprecht [24, 25] pero aquí los enunciamos siguiendo a Gowers y Maurey, que los probaron para una familia más amplia de espacios para poder aplicarlos a su espacio en la parte principal del artículo [13]. Para enunciarlos, requerimos primero algunas definiciones.

Definición 3.17 *Sea $\mathscr{X}$ el conjunto de espacios normados de la forma $X = (c_{00}, \|\cdot\|)$ tales que $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^\infty$ es una base monótona normalizada de X. Sea $\mathscr{F}$ es como en la definición* 3.4. *Si $f \in \mathscr{F}$, $X \in \mathscr{X}$, y toda $x \in X$ satisface la desigualdad*

$$\|x\| \ge \sup\left\{ f(N)^{-1}\sum_{i=1}^N \|E_i x\| : N \in \mathbb{N}, E_1 < \cdots < E_N \textit{ intervalos}\right\}$$

diremos que X **satisface una f-estimación inferior***.*

Nótese que esto implica que $\|Ex\| \leq \|x\|$ para todo intervalo E y todo vector x, por lo que la base estándar de un espacio con una f-estimación inferior es automáticamente bimonótona.

Obsérvese también que de la definición 3.12 y la proposición 3.16, para toda $f \in \mathscr{F}$, $S_f \in \mathscr{X}$ y S_f satisface una f-estimación inferior.

Ahora que tenemos una base en c_{00}, podemos extender algunos de los conceptos de la definición 3.11 a funcionales.

Definición 3.18 (I) *Sean $\{\mathbf{e}_n^*\}_{n=1}^\infty$ las funcionales biortogonales asociadas a la base $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$. (véase la proposición 1.39).*

(II) *Si $E \subset \mathbb{N}$, también utilizaremos la letra E para la proyección de $\langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$ en $\langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$ definida por $E(\sum_{i=1}^\infty a_i \mathbf{e}_i^*) = \sum_{i \in E} a_i \mathbf{e}_i^*$ (esto está bien definido porque cada suma de este tipo tiene solamente un número finito de sumandos distintos de cero, y cada vector tiene una representación única porque los $\mathbf{e}_i^*$ forman una base de Hamel de $\langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$).*

(III) *El* **soporte** *de una funcional $x^* = \sum_{i=1}^\infty x_i \mathbf{e}_i^* \in \langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$ es el conjunto $\mathrm{sop}(x^*) = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$.*

(IV) *Definimos el* **rango** *de una funcional $x^* \in \langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$, escrito $\mathrm{ran}(x^*)$, como el intervalo más pequeño que contiene a su soporte.*

(V) *Para $x^*, y^* \in \langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$, escribiremos $x^* < y^*$ para indicar que existen naturales $n_1 \leq m_1 < n_2 \leq m_2$ y escalares $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{m_1}$ y $b_{n_2}, b_{n_2+1}, \ldots, b_{m_2}$ tales que $x^* = \sum_{i=n_1}^{m_1} a_i \mathbf{e}_i^*$ y $y^* = \sum_{i=n_2}^{m_2} b_i \mathbf{e}_i^*$. Si $x_1^*, \ldots, x_n^* \in \langle \mathbf{e}_i^* \rangle_{i=1}^\infty$ y $x_1^* < \cdots < x_n^*$, diremos que $x_1^*, \ldots, x_n^*$ son* **sucesivas***.*

Definición 3.19 *Dados un espacio $X \in \mathscr{X}$ y un vector $x \in X$, diremos que x es una* **ℓ_{1+}^n-media con constante** *C si $\|x\| = 1$ y $x = \sum_{i=1}^n x_i$ para alguna sucesión $x_1 < \cdots < x_n$ de elementos de X tales que $0 < \|x_i\| \leq Cn^{-1}$ para $1 \leq i \leq n$. Un* **ℓ_{1+}^n-vector** *es cualquier múltiplo positivo de una ℓ_{1+}^n-media.*

En otras palabras, un vector x es un ℓ_{1+}^n-vector con constante C si puede ser escrito como $x = x_1 + \cdots + x_n$, donde $x_1 < \cdots < x_n$, los x_i son distintos de cero, y $\|x_i\| \leq Cn^{-1} \|x\|$ para $1 \leq i \leq n$. Observemos que por la definición, $|\mathrm{sop}(x)| \geq n$.

Ejemplo 3.20 Para $1 \leq p < \infty$, sea X_p el espacio c_{00} con la norma de ℓ_p restringida a c_{00}. Observemos que $X_p \in \mathscr{X}$, puesto que la base canónica de ℓ_p es monótona y normalizada y c_{00} es denso en ℓ_p. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $i_1 < \cdots < i_n$ naturales. Observemos que $n^{-1/p}\mathbf{e}_{i_1} < \cdots < n^{-1/p}\mathbf{e}_{i_n}$ y $n^{-1/p}\mathbf{e}_{i_j} \neq 0$ para $1 \leq j \leq n$. Sea $x = \sum_{j=1}^n n^{-1/p}\mathbf{e}_{i_j} \in X_p$. Como $\|x\|_p = \big(\sum_{j=1}^n (n^{-1/p})^p\big)^{1/p} = (n/n)^{1/p} = 1$ y $\big\|n^{-1/p}\mathbf{e}_{i_j}\big\|_p = n^{-1/p} = n^{1-1/p}n^{-1}$, concluimos que x es una ℓ_{1+}^n-media con constante $n^{1-1/p}$ en X_p.

Definición 3.21 *Una* **base bloque** *en un espacio $X \in \mathscr{X}$ es una sucesión $x_1, x_2, \dots$ de vectores sucesivos distintos de cero en X. Nótese que tal sucesión efectivamente es una sucesión básica, puesto que este concepto de base bloque coincide con el de la proposición 1.42. Un* **subespacio bloque** *de un espacio $X \in \mathscr{X}$ es un subespacio (algebraico) generado por una base bloque.*

A continuación iniciamos con los lemas.

Lema 3.22 *Sean $f \in \mathscr{F}$ y $X \in \mathscr{X}$ que satisface una f-estimación inferior. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $C > 1$, todo subespacio bloque Y de X contiene una ℓ_{1+}^n-media con constante C.*

Demostración. El resultado es trivial para $n = 1$, así que consideraremos solamente el caso $n \geq 2$. Supongamos que el resultado es falso, es decir, que existen $n \geq 2$, $C > 1$ y Y, un subespacio bloque de X, que no contiene una ℓ_{1+}^n-media con constante C. Sea $q = \ln C / \ln n > 0$, puesto que $C > 1$. De la propiedad (III) en la definición de $\mathscr{F}$ (definición 3.4), existe M tal que $x > M$ implica que $f(x)/x^q < 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^k > M$. Entonces, $f(n^k) < (n^k)^q = n^{kq}$ lo cual implica que $\ln f(n^k) < kq \ln n = k \ln C$.

Sean $N = n^k$, $x_1 < \cdots < x_N$ cualquier sucesión de vectores sucesivos de norma uno en Y, y $x = \sum_{i=1}^N x_i$. Para cualesquiera $0 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n^{k-i}$, sea $x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t$. Entonces,

$$\begin{aligned} x(0,j) &= \sum_{t=(j-1)n^0+1}^{jn^0} x_t = \sum_{t=j}^{j} x_t = x_j, \\ x(k,1) &= \sum_{t=(1-1)n^k+1}^{n^k} x_t = \sum_{t=1}^{N} x_t = x, \end{aligned} \tag{3.27}$$

y para $1 \leq i \leq k$, cada $x(i,j)$ es una suma de n vectores sucesivos de la forma $x(i-1,j)$, a saber

$$\begin{aligned} x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t &= \sum_{t=[(j-1)n]n^{i-1}+1}^{[(j-1)n+1]n^{i-1}} x_t + \cdots + \sum_{t=[(j-1)n+(n-1)]n^{i-1}+1}^{[(j-1)n+n]n^{i-1}} x_t \\ &= x\big(i-1,(j-1)n\big) + \cdots + x\big(i-1,(j-1)n+(n-1)\big) = \sum_{l=(j-1)n}^{jn-1} x(i-1,l). \end{aligned}$$

Ahora probaremos por inducción sobre i que para $0 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n^{k-i}$,

$$\|x(i,j)\| \leq C^{-i} n^i. \tag{3.28}$$

Para $i = 0$, debemos probar que para $1 \leq j \leq n^k$, $\|x(0,j)\| \leq C^{-0} n^0$, lo cual se sigue de que, por (3.27),

$$\|x(0,j)\| = \|x_j\| = 1 = C^{-0} n^0.$$

Supongamos que para $1 \leq u \leq i-1$ y $1 \leq v \leq n^{k-u}$, $\|x(u,v)\| \leq C^{-u}n^u$. Sea $1 \leq j \leq n^{k-i}$. Por nuestra suposición, $x(i,j)$ no es un ℓ_{1+}^n-vector con constante C. Por lo tanto, puesto que $x(i,j) = \sum_{l=(j-1)n}^{jn-1} x(i-1,l)$, y los $x(i-1,l)$ son vectores sucesivos y distintos de cero, existe $(j-1)n \leq l_{i-1} \leq jn-1$ tal que

$$\|x(i-1,l_{i-1})\| > Cn^{-1}\|x(i,j)\| . \tag{3.29}$$

De la hipótesis inductiva,

$$C^{-(i-1)}n^{i-1} \geq \|x(i-1,l_{i-1})\| . \tag{3.30}$$

De (3.29) y (3.30), $Cn^{-1}\|x(i,j)\| \leq C^{-(i-1)}n^{i-1}$, de donde $C^{-i}n^i \geq \|x(i,j)\|$, lo cual finaliza la inducción.

Ahora, usando (3.28) con $i = k$ y $j = 1 = n^{k-k}$, y (3.27), $\|x\| = \|x(k,1)\| \leq C^{-k}n^k = C^{-k}N$. Sin embargo, como X satisface una f-estimación inferior, $\|x\| \geq f(N)^{-1}\sum_{i=1}^N \|x_i\| = Nf(N)^{-1}$. Así, $Nf(N)^{-1} \leq C^{-k}N$, de donde se sigue que $f(n^k)^{-1} \leq C^{-k}$. Por lo tanto $-\ln f(n^k) \leq -k\ln C$, es decir $\ln f(n^k) \geq k\ln C$, lo cual contradice la elección de k. ∎

Lema 3.23 *Sean $M, N \in \mathbb{N}$, $C \geq 1$, $X \in \mathscr{X}$, $x \in X$ un ℓ_{1+}^N-vector con constante C y $E_1 < \cdots < E_M$ una sucesión de intervalos. Entonces*

$$\sum_{j=1}^M \|E_jx\| \leq C\left(1 + \frac{2M}{N}\right)\|x\| .$$

Demostración. Por conveniencia, normalicemos de modo que $\|x\| = N$ y sean $x_1 < \cdots < x_N$ tales que $x = \sum_{i=1}^N x_i$ y $\|x_i\| \leq C$ para $1 \leq i \leq N$. Dado $1 \leq j \leq M$, sean $A_j = \{1 \leq i \leq N : \operatorname{sop}(x_i) \subset E_j\}$ y $B_j = \{1 \leq i \leq N : E_j(x_i) \neq 0\}$. Por el hecho de que la base es bimonótona,

$$\|E_jx\| = \left\|\sum_{i=1}^N E_jx_i\right\| \leq \left\|\sum_{i\in B_j} x_i\right\|,$$

y de la desigualdad del triángulo, $\|E_jx\| \leq \sum_{i\in B_j}\|x_i\| \leq C|B_j|$. Ahora bien, como los x_i's son sucesivos, $|B_j| \leq |A_j|+2$, pues los x_i tales que $E_j(x_i) \neq 0$ son precisamente aquellos tales que $\operatorname{sop}(x_i) \subset E_j$ y a lo más otros 2, uno tal que la parte final de su soporte esté contenida en E_j y otro tal que sea la parte inicial. Así, $\|E_jx\| \leq C(|A_j|+2)$. Como $\sum_{j=1}^M |A_j| \leq N$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^M \|E_jx\| \leq C(N+2M),$$

lo cual nos da el resultado deseado, debido a la normalización que hicimos. ∎

Para poder enunciar el siguiente lema, necesitaremos algunas definiciones más. La primera es un tecnicismo.

Definición 3.24 *Si $f \in \mathscr{F}$, sea $M_f : [1/6, \infty) \to [1, \infty)$ definida por $M_f(x) = f^{-1}(36x^2)$.*

Observemos que M_f está bien definida porque f es estrictamente creciente y tiende a infinito.

La siguiente definición es de gran importancia para este trabajo.

Definición 3.25 *Sean $\varepsilon > 0$, $X \in \mathscr{X}$ y $N \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathscr{F}$, diremos que una sucesión $x_1 < \cdots < x_N$ en X es una* **sucesión de ℓ_{1+}^n-medias rápidamente creciente (S.R.C.) para f de longitud N con constante** $1 + \varepsilon$ *si existen naturales $n_1, \ldots n_N$ tales que*

(I) *x_k es una $\ell_{1+}^{n_k}$-media con constante $1 + \varepsilon$ para $1 \leq k \leq N$.*

(II) *$n_1 \geq 2(1 + \varepsilon) M_f(N/\varepsilon')/\varepsilon' f'(1)$.*

(III) *Para $2 \leq k \leq N$,*

$$\frac{\varepsilon'}{2} f(n_k)^{1/2} \geq |\operatorname{sop}(x_{k-1})|,$$

donde $f'(1)$ es la derivada por la derecha de f en 1 y ε' es una notación útil para $\min\{\varepsilon, 1\}$, *que utilizaremos de ahora en adelante.*

Observemos que la definición tiene sentido puesto que, por la definición 3.4, $f'(1)$ existe y es positivo. Algunas veces será conveniente llamar a un vector un S.R.C.-vector si es un múltiplo no nulo de la suma de una S.R.C.

Proposición 3.26 *Sean f, X, N, $x_1, \cdots, x_N$, ε y $n_1, \ldots n_N$ como en la definición 3.25. Entonces $n_1 < \cdots < n_N$.*

Demostración. Sea $1 < k \leq N$. De la definición 3.19), $|\operatorname{sop}(x_{k-1})| \geq n_{k-1}$. De la definición de $\mathscr{F}$, $f(y) \geq 1$ y $y \geq f(y)$ para toda $y \geq 1$. Usando esto y la propiedad (III) de la definición de S.R.C. (definición 3.25),

$$\frac{1}{2} f(n_k) \geq \frac{1}{2} f(n_k)^{1/2} \geq \frac{\varepsilon'}{2} f(n_k)^{1/2} \geq |\operatorname{sop}(x_{k-1})| \geq f(n_{k-1}), \tag{3.31}$$

de donde $f(n_k) \geq 2f(n_{k-1})$. Como f es estrictamente creciente por la proposición 3.5, $n_k > n_{k-1}$. ∎

Definición 3.27 *Sean $g \in \mathscr{F}$, $X \in \mathscr{X}$ y $M \in \mathbb{N}$. Una funcional $x^* \in X^*$ es una (M, g)-***forma** *si $\|x^*\| \leq 1$ y $x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$ para alguna sucesión $x_1^* < \cdots < x_M^*$ de funcionales sucesivas tales que $\|x_j^*\| \leq g(M)^{-1}$ para $1 \leq j \leq M$.*

Antes de pasar al siguiente lema demostraremos algunos resultados.

Proposición 3.28 *Sean $X \in \mathscr{X}$ y $x \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe una* **funcional soporte** *para x, es decir, una funcional $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$, $\operatorname{sop}(x^*) \subset \operatorname{ran}(x)$ y $x^*(x) = \|x\|$.*

Demostración. De la definición de $\mathscr{X}$, x tiene soporte finito. Sean $A = \text{ran}(x)$ y $X_A = sp\{\mathbf{e}_i : i \in A\}$. Claramente, $x \in X_A$. Por el teorema de Hahn-Banach (teorema 1.20), existe $x_A^* \in X_A^* = [\mathbf{e}_i^*]_{i\in A}$ tal que $\|x_A^*\| = 1$ y $x_A^*(x) = \|x\|$. Como X_A es un subespacio de dimensión finita de X (ya que $\text{sop}(x)$ es finito), la proyección $A : X \to X_A$ es acotada. Observemos que $\|A\| = 1$, puesto que por la proposición 1.19 $\|A\| \geq 1$, y $\|Ay\| \leq \|y\|$ para toda $y \in X$ puesto que la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X es bimonótona. Definamos $x^*(y) = x_A^*(Ay)$ para toda $y \in X$. Entonces x^* es una funcional lineal acotada y por lo tanto $x^* \in X^*$. Observemos que X_A^* es de dimensión finita y por lo tanto x_A^* es una combinación lineal de los $\mathbf{e}_i^* \in X_A^*$ con $i \in A$. Luego, $\text{sop}(x^*) \subset A$. Además, $\|x^*\| \leq \|x_A^*\|\,\|A\| = 1$. Por otro lado, $x^*(x) = x_A^*(Ax) = x_A^*(x) = \|x\|$, de donde se sigue que $\|x^*\| = 1$. Por lo tanto, x^* es una funcional soporte para x. ■

Proposición 3.29 *Sean $X \in \mathscr{X}$, $x \in X$ y supongamos que $x^* \in X^*$ tiene soporte finito. Entonces, para cualquier intervalo $E \subset \mathbb{N}$, $x^*(Ex) = (Ex^*)(x)$.*

Demostración. De la definición de $\mathscr{X}$, x también tiene soporte finito. Si escribimos $x = \sum_{i\in\text{sop}(x)} a_i\mathbf{e}_i$ y $x^* = \sum_{j\in\text{sop}(x^*)} b_j\mathbf{e}_j^*$, entonces

$$\begin{aligned} x^*(Ex) &= \left(\sum_{j\in\text{sop}(x^*)} b_j\mathbf{e}_j^*\right)\left(\sum_{i\in E\cap\text{sop}(x)} a_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i\in E\cap\text{sop}(x)\cap\text{sop}(x^*)} a_i b_i \\ &= \left(\sum_{j\in E\cap\text{sop}(x^*)} b_j\mathbf{e}_j^*\right)\left(\sum_{i\in\text{sop}(x)} a_i\mathbf{e}_i\right) = (Ex^*)(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 3.30 *Sean $f \in \mathscr{F}$ y $X \in \mathscr{X}$ que satisface una f-estimación inferior. Si $x^* \in X^*$ tiene soporte finito, entonces, para cualquier intervalo $E \subset \mathbb{N}$, $\|Ex^*\| \leq \|x^*\|$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como X satisface una f-estimación inferior, $\|Ex\| \leq \|x\|$. Ahora, por la proposición 3.29, $x^*(Ex) = (Ex^*)(x)$. Por lo tanto,

$$|(Ex^*)(x)| = |x^*(Ex)| \leq \|x^*\|\,\|Ex\| \leq \|x^*\|\,\|x\|\,,$$

de donde $\|Ex^*\| \leq \|x^*\|$. ■

Lema 3.31 *Sean $f, g \in \mathscr{F}$ con $g \geq f^{1/2}$, y $X \in \mathscr{X}$ que satisface una f-estimación inferior. Sean $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_N$ una S.R.C. en X para f con constante $1+\varepsilon$, y $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Sean $M \geq M_f(N/\varepsilon')$ y x^* una (M, g)-forma. Entonces $|x^*(x)| \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$.*

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq N$, sea n_i el máximo para el cual x_i es una $\ell_{1+}^{n_i}$-media con constante $1+\varepsilon$. Expresemos $x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$ de acuerdo a la definición, y sea $E_j = \text{ran}(x_j^*)$ para $1 \leq j \leq M$. Primero obtendremos tres estimaciones fáciles para $|x^*(x_i)|$. Como $\|x^*\| \leq 1$, evidentemente tenemos que

$$|x^*(x_i)| \leq 1. \tag{3.32}$$

Por otro lado, como $\|x_j^*\| \leq g(M)^{-1} \leq f(M)^{-1/2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |x^*(x_i)| &= |\sum_{j=1}^{M} x_j^*(x_i)| = |\sum_{j=1}^{M}(E_j x_j^*)(x_i)| = |\sum_{j=1}^{M} x_j^*(E_j x_i)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{M} |x_j^*(E_j x_i)| \leq \sum_{j=1}^{M} \left\|x_j^*\right\| \|E_j x_i\| \leq f(M)^{-1/2} \sum_{j=1}^{M} \|E_j x_i\|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Como X satisface una f-estimación inferior, $f(|\operatorname{sop}(x_i)|)^{-1} \sum_{j=1}^{M} \|E_j x_i\| \leq \|x_i\| = 1$, i.e.

$$\sum_{j=1}^{M} \|E_j x_i\| \leq f(|\operatorname{sop}(x_i)|), \tag{3.34}$$

y por el lema 3.23,

$$\sum_{j=1}^{M} \|E_j x_i\| \leq (1+\varepsilon)(1+2M/n_i). \tag{3.35}$$

De (3.31),

$$\frac{1}{2} f(|\operatorname{sop}(x_k)|) \geq \frac{1}{2} f(n_k) \geq |\operatorname{sop}(x_{k-1})| \geq f(|\operatorname{sop}(x_{k-1})|).$$

Sea t el máximo tal que $n_t \leq M$, o cero si $n_k > M$ para $1 \leq k \leq N$.

(1) Si $t > 0$:
Para $i < t$, por lo anterior tenemos que

$$f(|\operatorname{sop}(x_i)|) \leq 2^{i-t+1} f(|\operatorname{sop}(x_{t-1})|). \tag{3.36}$$

De la propiedad (III) de la definición 3.25, que f es creciente y $f(x) \leq x$,

$$f(|\operatorname{sop}(x_{t-1})|) \leq |\operatorname{sop}(x_{t-1})| \leq \frac{\varepsilon'}{2} f(n_t)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon'}{2} f(M)^{1/2}. \tag{3.37}$$

Ahora bien,

$$|x^*(x)| = \left|\sum_{i=1}^{N} x^*(x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^{t-1} |x^*(x_i)| + |x^*(x_t)| + \sum_{i=t+1}^{N} |x^*(x_i)|. \tag{3.38}$$

De (3.32),

$$|x^*(x_t)| \leq 1. \tag{3.39}$$

Usando (3.33), (3.34), (3.36) y (3.37)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t-1} |x^*(x_i)| &\leq f(M)^{-1/2} \sum_{i=1}^{t-1} f(|\operatorname{sop}(x_i)|) \leq f(M)^{-1/2} f(|\operatorname{sop}(x_{t-1})|) 2^{-t+1} \sum_{i=1}^{t-1} 2^i \\ &\leq f(M)^{-1/2} \frac{\varepsilon'}{2} f(M)^{1/2} 2^{-t+1}(2^t - 2) = \frac{2^t - 2}{2^t} \varepsilon' \leq \varepsilon'. \end{aligned} \tag{3.40}$$

(2) Si $t \geq 0$:
Observemos que $M \geq M_f(N/\varepsilon')$ implica, por la definición 3.24, que $f(M) \geq 36(N/\varepsilon')^2$, y por lo tanto $f(M)^{-1/2} \leq \varepsilon'/6N$. Luego, recordando que $n_i > M$ para $i > t$, y usando (3.33) y (3.35)

$$\begin{aligned}\sum_{i=t+1}^{N} |x^*(x_i)| &\leq f(M)^{-1/2}(1+\varepsilon) \sum_{i=t+1}^{N} (1 + 2M/n_i) \leq f(M)^{-1/2}(1+\varepsilon)3(N-t) \\ &\leq \frac{\varepsilon'}{6N}(1+\varepsilon)3N = \frac{\varepsilon'}{2}(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

Consideremos ahora los dos valores posibles para ε'. Si $\varepsilon \geq 1$, entonces $\varepsilon' = 1$ y por lo tanto $\varepsilon'(1+\varepsilon)/2 = (1+\varepsilon)/2 \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. Si $\varepsilon \leq 1$, entonces $\varepsilon' = \varepsilon$ y por lo tanto $\varepsilon'(1+\varepsilon)/2 = \varepsilon(1+\varepsilon)/2 = (\varepsilon+\varepsilon^2)/2 \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. Luego,

$$\sum_{i=t+1}^{N} |x^*(x_i)| \leq \varepsilon. \tag{3.41}$$

Si $t > 0$, usando (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) obtenemos $|x^*(x)| \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$, y en el caso $t = 0$, por (3.41), $|x^*(x)| \leq \varepsilon \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$. ■

Corolario 3.32 *Sean f, g, X, ε, M, $x_1, \ldots, x_N$, x y x^* como en el lema 3.31, y sea $E \subset \mathbb{N}$ un intervalo. Entonces $|x^*(Ex)| \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$.*

Demostración. Por la proposición 3.29, $x^*(Ex) = (Ex^*)(x)$. Luego, usando la proposición 3.30 y que $\|x^*\| \leq 1$ por ser una (M,g)-forma, $\|Ex^*\| \leq \|x^*\| \leq 1$. Además, $Ex^* = E\sum_{j=1}^{M} x_j^* = \sum_{j=1}^{M} Ex_j^*$. Nótese que los Ex_j^* son funcionales sucesivas y $\|Ex_j^*\| \leq \|x_j^*\| \leq g(M)^{-1}$, otra vez por la proposición 3.30. Por lo tanto, puesto que x^* es una (M,g)-forma entonces Ex^* también lo es, y podemos aplicar el lema 3.31, obteniendo $|x^*(Ex)| = |(Ex^*)(x)| \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$. ■

Corolario 3.33 *Sean f, X, ε, M, $x_1, \ldots, x_N$ y x como en el lema 3.31, y sean $E_1 < \cdots < E_M$ intervalos. Entonces*

$$f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} \|E_i x\| \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Demostración. Para $1 \leq i \leq M$ sea x_i^* una funcional soporte de $E_i x$ (dada por la proposición 3.28), y sea $x^* = f(M)^{-1}\sum_{i=1}^{M} x_i^*$. Entonces, usando que X satisface una f-estimación inferior, que $\operatorname{sop}(x_i^*) \subset \operatorname{ran}(E_i x) \subset E_i$ y la proposición 3.29, para $y \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}|x^*(y)| &= \left| f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} x_i^*(y) \right| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} |x_i^*(y)| = f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} |(E_i x_i^*)(y)| \\ &= f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} |x_i^*(E_i y)| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} \|x_i^*\| \, \|E_i y\| \leq f(M)^{-1} \sum_{i=1}^{M} \|E_i y\| \leq \|y\|\end{aligned}$$

y por lo tanto $\|x^*\| \leq 1$. Las funcionales x_i^* claramente son sucesivas y además $\left\|f(M)^{-1}x_i^*\right\| = f(M)^{-1}\left\|x_i^*\right\| \leq f(M)^{-1}$. Por lo tanto, x^* es una (M,f) forma. Así, podemos aplicar el lema 3.31 con $g = f$ (puesto que $f \geq f^{1/2}$), y obtenemos que $|x^*(x)| \leq 1+\varepsilon+\varepsilon'$, es decir,

$$\begin{aligned} f(M)^{-1}\sum_{i=1}^{M}\|E_i x\| &= f(M)^{-1}\sum_{i=1}^{M}|x_i^*(E_i x)| = f(M)^{-1}\Big|\sum_{i=1}^{M}x_i^*(E_i x)\Big| \\ &= f(M)^{-1}\Big|\sum_{i=1}^{M}x_i^*(x)\Big| = |x^*(x)| \leq 1+\varepsilon+\varepsilon'. \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora introduciremos otra definición conveniente. Sea $x_1 < \cdots < x_N$ una S.R.C. en $X \in \mathscr{X}$ para f con constante $1+\varepsilon$ para alguna $f \in \mathscr{F}$ y algún $\varepsilon > 0$. Para cada $1 \leq i \leq N$, sea n_i el máximo tal que x_i es una $\ell_{1+}^{n_i}$-media con constante $1+\varepsilon$, y expresemos $x_i = x_{i,1}+\cdots+x_{i,n_i}$, donde $\|x_{i,j}\| \leq (1+\varepsilon)n_i^{-1}$ para cada j. Dado un intervalo $E \subset \mathbb{N}$, sean

$$i_E = \min\{i \in \mathbb{N} : Ex_i \neq 0\}, \quad j_E = \max\{j \in \mathbb{N} : Ex_j \neq 0\} \tag{3.42}$$

y

$$r_E = \min\{r \in \mathbb{N} : Ex_{i_E,r} \neq 0\}, \quad s_E = \max\{s \in \mathbb{N} : Ex_{j_E,s} \neq 0\}. \tag{3.43}$$

Definimos la ***longitud*** del intervalo E como

$$\lambda(E) = j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} = \left(j_E - 1 + \frac{s_E}{n_{j_E}}\right) - \left(i_E - 1 + \frac{r_E}{n_{i_E}}\right).$$

Obviamente esta definición depende por completo de la S.R.C., pero siempre será claro del contexto cuál S.R.C. está siendo considerada. A continuación probamos tres propiedades de la longitud.

Proposición 3.34 *Si E es un intervalo, entonces $\lambda(E) \leq N$.*

Demostración. De sus respectivas definiciones, $\lambda(E) = j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}}$, $j_E \leq N$, $i_E \geq 1$, $s_E \leq n_{j_E}$ y $r_E/n_{i_E} \geq 0$. Por lo tanto, $\lambda(E) \leq N-1+1+0 = N$. ■

Proposición 3.35 *Si A y B son intervalos, y $A \subset B$, entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.*

Demostración. De las definiciones dadas en (3.42), claramente $i_B \leq i_A$ (i.e. $-i_A \leq -i_B$) y $j_A \leq j_B$. Para ambas desigualdades tenemos dos casos:

(I) Si $j_A = j_B$, entonces $s_A \leq s_B$ y por lo tanto $s_A/n_{j_A} \leq s_B/n_{j_B}$. Luego,

$$j_A + \frac{s_A}{n_{j_A}} \leq j_B + \frac{s_B}{n_{j_B}}.$$

(II) Si $j_A < j_B$, entonces

$$j_A + \frac{s_A}{n_{j_A}} \leq j_A + 1 \leq j_B \leq j_B + \frac{s_B}{n_{j_B}}.$$

(I') Si $i_B = i_A$, entonces $r_B \leq r_A$ y por lo tanto $r_B/n_{i_B} \leq r_A/n_{i_A}$, de donde obtenemos

$$-i_A - r_A/n_{i_A} \leq -i_B - r_B/n_{i_B}.$$

(II') Si $i_B < i_A$, entonces $-i_A < -i_B$, de donde obtenemos que $-i_A + r_B/n_{i_B} \leq -i_A + 1 \leq -i_B$ y por lo tanto

$$-i_A - r_A/n_{i_A} \leq -i_A \leq -i_B - r_B/n_{i_B}.$$

En cualquier combinación de los casos, sumando las desigualdades obtenemos que $\lambda(A) \leq \lambda(B)$. ■

Proposición 3.36 *Si $E_1 < \cdots < E_M$ y E son intervalos, y $\bigcup_{k=1}^M E_k \subset E$, entonces $\sum_{k=1}^M \lambda(E_k) \leq \lambda(E)$.*

Demostración. Observemos que basta con probar el caso $M = 2$ y razonar inductivamente. Además, por la proposición 3.35 basta considerar el caso $E = \{i \in \mathbb{N} : \min E_1 \leq i \leq \max E_2\}$. Observemos que en este caso $i_E = i_{E_1}$, $j_E = j_{E_2}$, $s_E = s_{E_2}$ y $r_E = r_{E_1}$. Por otro lado, $j_{E_1} \leq i_{E_2}$. Una vez más consideramos dos casos:

(I) Si $j_{E_1} = i_{E_2}$, entonces $s_{E_1} \leq r_{E_2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lambda(E_1) + \lambda(E_2) &= j_{E_1} - i_{E_1} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} + j_{E_2} - i_{E_2} + \frac{s_{E_2}}{n_{j_{E_2}}} - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \\
&= j_{E_1} - i_{E_2} + j_{E_2} - i_{E_1} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} + \frac{s_{E_2}}{n_{j_{E_2}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} \\
&= 0 + j_E - i_E + \frac{s_{E_1} - r_{E_2}}{n_{j_{E_1}}} + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} \\
&\leq j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} = \lambda(E).
\end{aligned}$$

(II) Si $j_{E_1} < i_{E_2}$, entonces $j_{E_1} + 1 \leq i_{E_2}$, i.e. $j_{E_1} - i_{E_2} \leq -1$.

$$\begin{aligned}
\lambda(E_1) + \lambda(E_2) &= j_{E_1} - i_{E_1} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} + j_{E_2} - i_{E_2} + \frac{s_{E_2}}{n_{j_{E_2}}} - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \\
&= j_{E_1} - i_{E_2} + j_{E_2} - i_{E_1} + \frac{s_{E_2}}{n_{j_{E_2}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \\
&\leq -1 + j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \\
&= \lambda(E) + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - 1 - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \leq \lambda(E) - \frac{r_{E_2}}{n_{i_{E_2}}} \leq \lambda(E).
\end{aligned}$$

Con lo cual queda probada la proposición. ■

El siguiente lema es el más importante para nuestros propósitos, pero antes probaremos una proposición técnica que utilizaremos para su demostración.

Proposición 3.37 *Sean* $f, g \in \mathscr{F}$, $X \in \mathscr{X}$ *que satisface una* f*-estimación inferior, y* $x \in X$. *Si* $C = \{|x^*(x)| : M \geq 2,\ x^*$ *es una* (M, g)*-forma*$\}$, *entonces* $\sup C \in C$.

Demostración. De la definición de $\mathscr{X}$, x tiene soporte finito. Sean A, X_A y X_A^* como en la demostración de la proposición 3.28. Para cualquier (M, g)-forma $x^* \in X^*$, por la proposición 3.29, $|x^*(x)| = |x^*(Ax)| = |(Ax^*)(x)|$. Observemos que $Ax^* \in X_A^*$. De la definición de (M, g)-forma, $\|x^*\| \leq 1$, $x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$ para alguna sucesión $x_1^* < \cdots < x_M^*$ de funcionales sucesivas tales que $\left\|x_j^*\right\| \leq g(M)^{-1}$ para $1 \leq j \leq M$. Luego, $Ax^* = \sum_{j=1}^{M} Ax_j^*$. Observemos que las funcionales Ax_j^* son sucesivas, $\|Ax^*\| \leq \|x^*\| \leq 1$ por la proposición 3.30 y además $\left\|Ax_j^*\right\| \leq \|A\| \left\|x_j^*\right\| \leq g(M)^{-1}$. Por lo tanto, si para $M \geq 2$ definimos $D_M = \{x^* \in X_A^* : x^*$ es una (M, g)-forma $\}$ y $C_M = \{|x^*(x)| : x^* \in D_M\}$, entonces $C = \bigcup_{M=2}^{\infty} C_M$.

Sea $n = \text{máx}\{|A|, 2\}$. Sean $M > n$ y $x^* \in D_M$. Entonces $\|x^*\| \leq 1$ y $x^* = \sum_{j=1}^{M} x_j^*$ para alguna sucesión $x_1^* < \cdots < x_M^*$ de funcionales sucesivas tales que $\left\|x_j^*\right\| \leq g(M)^{-1}$ y $\text{ran}(x_j^*) \subset A$ para $1 \leq j \leq M$. Como $n \geq |A|$, a lo más n de las funcionales x_j^* son distintas de 0. Por lo tanto, existen $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq M$ tales que $x^* = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j}^*$. Observemos que $x_{i_1}^* < \cdots < x_{i_n}^*$, y como $n < M$, $g(n) < g(M)$, y entonces $\left\|x_{i_j}^*\right\| \leq g(M)^{-1} < g(n)^{-1}$ para $1 \leq j \leq n$, y por lo tanto x^* es una (n, g)-forma. Como además $\text{ran}(x^*) \subset A$, $x^* \in D_n$. Por lo tanto, $C = \bigcup_{M=2}^{n} C_M$.

Ahora probaremos que $\sup C_M \in C_M$ para $2 \leq M \leq n$. Consideremos un valor de M fijo. Sea $B = \{x^* \in X_A^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Mostraremos que $B \setminus D_M$ es abierto en B. Sea $z^* \in B \setminus D_M$. Por una *partición de tamaño* N de A entenderemos una sucesión $A_1 < \cdots < A_N$ de intervalos sucesivos tales que $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = A$. Dada una partición $A_1 < \cdots < A_N$ de tamaño $N \leq M$ de A, puesto que $z^* = \sum_{i=1}^{N} A_i z^*$ y z^* no es una (M, g)-forma, existe $1 \leq j \leq N$ tal que $\left\|A_j z^*\right\| > g(M)^{-1}$. Definamos

$$\alpha_M = \text{mín}\left\{\left\|Ez^*\right\| - g(M)^{-1} : \left\|Ez^*\right\| > g(M)^{-1},\ E \subset A \text{ es un intervalo}\right\}.$$

Observemos que α_M está bien definido porque el conjunto es no vacío y el mínimo existe porque hay solamente un número finito de tales conjuntos E, y además $\alpha_M > 0$. Ahora, sea $y^* \in B$ tal que $\|y^* - z^*\| < \alpha_M/2$. Consideremos cualquier partición $A_1 < \cdots < A_N$ de tamaño $N \leq M$ de A. Como ya mencionamos antes, existe $1 \leq j \leq N$ tal que $\left\|A_j z^*\right\| > g(M)^{-1}$. Como X satisface una f-estimación inferior, $\left\|A_j(z^* - y^*)\right\| \leq \|y^* - z^*\| < \alpha_M/2$. Luego,

$$\left\|A_j y^*\right\| > \left\|A_j z^*\right\| - \alpha_M/2 \geq \alpha_M + g(M)^{-1} - \alpha_M/2 = \alpha_M/2 + g(M)^{-1} > g(M)^{-1}.$$

Por lo tanto, puesto que $y^* = \sum_{i=1}^{N} A_i y^*$, y^* no es una (M, g)-forma, es decir, $y^* \in B \setminus D_M$. Entonces $B \setminus D_M$ es abierto en B, y por lo tanto D_M es cerrado en B.

Observemos que B es la bola unitaria cerrada en un espacio de dimensión finita, y entonces es compacto (véase el teorema 1.13). Por lo tanto D_M también lo es, ya que es cerrado en B. Como la función $v : D_M \to \mathbb{R}$ dada por $v(x^*) = |x^*(x)|$ es continua, de la compacidad de D_M se sigue que $\sup C_M \in C_M$. Ahora bien, como $C = \bigcup_{M=2}^{n} C_M$, entonces $\sup C = \max_{2\leq M\leq n} \sup C_M$, y por lo tanto $\sup C \in C$. ■

Lema 3.38 *Sean $f, g \in \mathscr{F}$ con $g \geq \sqrt{f}$, $X \in \mathscr{X}$ que satisface una f-estimación inferior, $\varepsilon > 0$, $x_1 < \cdots < x_N$ una S.R.C. en X para f con constante $1+\varepsilon$, y $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Supongamos que*

$$\|Ex\| \leq \sup\left\{|x^*(Ex)| : M \geq 2,\ x^* \text{ es una } (M,g)\text{-forma}\right\}$$

para todo intervalo E de longitud al menos 1. Entonces $\|x\| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')Ng(N)^{-1}$.

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{N}$ un intervalo. De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$\|Ex\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} Ex_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|Ex_i\| = \sum_{i=i_E}^{j_E} \|Ex_i\|. \tag{3.44}$$

Ahora bien, si $i_E < i < j_E$, como x_i es una $\ell_{1+}^{n_i}$-media con constante $1+\varepsilon$, entonces

$$\|Ex_i\| = \left\|E(\sum_{k=1}^{n_i} x_{i,k})\right\| \leq \sum_{k=1}^{n_i} \|Ex_{i,k}\| \leq \sum_{k=1}^{n_i} \|x_{i,k}\| \leq n_i(1+\varepsilon)n_i^{-1} = 1+\varepsilon. \tag{3.45}$$

Por otro lado,

$$\|Ex_{i_E}\| \leq \sum_{k=r_E}^{n_{i_E}} \|Ex_{i_E,k}\| \leq \sum_{k=r_E}^{n_{i_E}} \|x_{i_E,k}\| \leq (n_{i_E} - r_E + 1)(1+\varepsilon)n_{i_E}^{-1} = (1+\varepsilon)(1 - \frac{r_E}{n_{i_E}} + \frac{1}{n_{i_E}}). \tag{3.46}$$

Además,

$$\|Ex_{j_E}\| \leq \sum_{k=1}^{s_E} \|Ex_{j_E,k}\| \leq \sum_{k=1}^{s_E} \|x_{j_E,k}\| \leq s_E(1+\varepsilon)n_{j_E}^{-1}. \tag{3.47}$$

Por lo tanto, de (3.44), (3.45), (3.46), (3.47), y que $n_1 \leq n_{i_E}$ por la proposición 3.26,

$$\|Ex\| \leq (1+\varepsilon)\left(j_E - i_E - 1 + 1 - \frac{r_E}{n_{i_E}} + \frac{1}{n_{i_E}} + \frac{s_E}{n_{j_E}}\right) \leq (1+\varepsilon)\left(\lambda(E) + \frac{1}{n_1}\right). \tag{3.48}$$

Si $\lambda(E) \geq (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$, entonces obtenemos

$$\|Ex\| \leq (1+\varepsilon)\lambda(E) + (1+\varepsilon)/n_1 = (1+\varepsilon)\lambda(E) + \varepsilon'(1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1 \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\lambda(E). \tag{3.49}$$

Definamos $G : [1,\infty) \to [1,\infty)$ por $G(x) = x/g(x)$, y extendámosla a todo $\mathbb{R}_+$ como en la proposición 3.10. Si $\lambda(E) \leq 1$, por (3.49) obtenemos que

$$\|Ex\| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\lambda(E) \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E)).$$

Probaremos ahora que siempre que $\lambda(E) > 1$ y $\lambda(E) \geq (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$,

$$\|Ex\| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E)). \tag{3.50}$$

Supongamos entonces que E es un intervalo minimal de longitud al menos $(1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$ para el cual la desigualdad (3.50) no se cumple. Sabemos que $\lambda(E) > 1$. Por otro lado, por la proposición 3.37 existe alguna (M, g)-forma $x^* = \sum_{i=1}^M x_i^*$ tal que $\|Ex\| \leq |x^*(Ex)|$. Por el corolario 3.32, si $M \geq M_f(N/\varepsilon')$ entonces $\|Ex\| \leq |x^*(Ex)| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon') \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E))$, es decir, la desigualdad se cumple para E. Luego, debemos tener que

$$M \leq M_f(N/\varepsilon'). \tag{3.51}$$

Tomando $E_i = E \cap \operatorname{ran}(x_i^*)$, obtenemos, por la definición 3.27,

$$\begin{aligned} \|Ex\| \leq |x^*(Ex)| = \left|\sum_{i=1}^M x_i^*(Ex)\right| = \left|\sum_{i=1}^M x_i^*(E_i x)\right| \\ \leq \sum_{i=1}^M |x_i^*(E_i x)| \leq \sum_{i=1}^M \|x_i^*\| \, \|E_i x\| \leq g(M)^{-1} \sum_{i=1}^M \|E_i x\| \end{aligned} \tag{3.52}$$

Si para algún i_0 se tuviera que $E_{i_0} = E$, entonces tendríamos $E_i = \emptyset$ para toda $i \neq i_0$, y entonces la desigualdad (3.52) se reduciría a $\|Ex\| \leq g(M)^{-1} \|Ex\|$. Como para E no se cumple la desigualdad (3.50), $\|Ex\| > 0$ y por lo tanto obtenemos que $1 \leq g(M)^{-1}$, es decir, $g(M) \leq 1$, lo cual es una contradicción puesto que $M \geq 2$ y $g \in \mathscr{F}$, por lo que $g(M) > g(1) = 1$. Así, podemos suponer que ninguno de los intervalos E_i es igual a E. Sea $\lambda_i = \lambda(E_i)$ para cada i. Para cada i, tenemos que $\lambda_i \leq (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$, o bien que $\lambda_i \geq (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$ y en este segundo caso, por la minimalidad de E, $\|E_i x\| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda_i)$. Sea A el conjunto de los i con la primera propiedad, y sea B el complemento de A. Sea $k = |A|$.

De la definición de A y (3.48) se obtiene

$$\sum_{i \in A} \|E_i x\| \leq (1+\varepsilon) \sum_{i \in A} \big(\lambda_i + \frac{1}{n_1}\big) \leq k(1+\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1} + \frac{1}{n_1}\right) = (1+\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{k}{\varepsilon' n_1}. \tag{3.53}$$

Observemos que $G(1) - G'(1) = 1 - G'(1) = 1 - \frac{g(1) - 1 \cdot g'(1)}{g(1)^2} = g'(1)$. Como $\lambda \geq 1$, esto junto con la proposición 3.9 nos da que para cualquier $0 \leq t < 1$

$$(1-t)G\Big(\frac{\lambda}{1-t}\Big) + tg'(1) \leq G(\lambda), \tag{3.54}$$

y en el caso $t = 1$,

$$g'(1) \leq G(\lambda). \tag{3.55}$$

Y por otro lado, puesto que $g \geq \sqrt{f}$ y $g(1) = f(1) = 1$, tenemos que $\operatorname{lím}_{s\downarrow 0} \big(g(1+s) - g(1)\big)/s \geq \operatorname{lím}_{s\downarrow 0} \big(\sqrt{f(1+s)} - \sqrt{f(1)}\big)/s$. Entonces, usando la regla de la cadena para calcular el segundo límite,

$$g'(1) \geq f(1)^{-1/2} f'(1)/2 = f'(1)/2 > 0, \tag{3.56}$$

donde la última desigualdad se sigue de la proposición 3.5.

Usando (3.51), la propiedad (II) de la definición de S.R.C. (definición 3.25), y (3.56) obtenemos que

$$\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon' n_1} \leq \frac{1}{M}\frac{(1+\varepsilon)M_f(N/\varepsilon')}{\varepsilon' n_1} \leq \frac{1}{M}\frac{f'(1)}{2} \leq \frac{1}{M}g'(1). \tag{3.57}$$

Ahora consideremos los dos casos posibles:

(1) Si $k < M$:
Como G es una función cóncava y no decreciente y por la proposición 3.36 tenemos que $\sum \lambda_i \leq \lambda(E) = \lambda$, la desigualdad de Jensen (proposición 1.3) nos da que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B}\|E_i x\| &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\sum_{i\in B}G(\lambda_i) \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')(M-k)G\left(\frac{\sum_{i\in B}\lambda_i}{M-k}\right)\\ &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')(M-k)G\left(\frac{\lambda}{M-k}\right).\end{aligned} \tag{3.58}$$

De (3.52), (3.53) y (3.58), observando que $G(M)/M = 1/g(M) \leq 1$ puesto que $M \geq 1$, y que G es supermultiplicativa (véase la proposición 1.5) se sigue que

$$\begin{aligned}\|Ex\| &\leq g(M)^{-1}\sum_{i=1}^{M}\|E_i x\| = \frac{M}{g(M)}\frac{1}{M}\left(\sum_{i\in B}\|E_i x\| + \sum_{i\in A}\|E_i x\|\right)\\ &\leq \frac{G(M)}{M}\left[(1+\varepsilon+\varepsilon')(M-k)G\left(\frac{\lambda}{M-k}\right) + (1+\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{k}{\varepsilon' n_1}\right]\\ &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\left[\frac{G(M)}{M}(M-k)G\left(\frac{\lambda}{M-k}\right) + (1+\varepsilon)\frac{k}{\varepsilon' n_1}\right]\\ &= (1+\varepsilon+\varepsilon')\left[(1-\frac{k}{M})G(M)G\left(\frac{\lambda}{M-k}\right) + (1+\varepsilon)\frac{k}{\varepsilon' n_1}\right]\\ &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\left[(1-\frac{k}{M})G\left(\frac{\lambda}{1-\frac{k}{M}}\right) + (1+\varepsilon)\frac{k}{\varepsilon' n_1}\right].\end{aligned} \tag{3.59}$$

Por lo tanto, usando (3.57) y (3.54) con $t = k/M$ (que es menor que 1 puesto que $k < M$), tenemos

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon+\varepsilon')\left[(1-\frac{k}{M})G(\frac{\lambda}{1-\frac{k}{M}}) + (1+\varepsilon)\frac{k}{\varepsilon' n_1}\right] &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')\left[(1-t)G\left(\frac{\lambda}{1-t}\right) + tg'(1)\right]\\ &\leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda),\end{aligned}$$

lo cual, al combinarlo con (3.59) nos da que $\|Ex\| \leq (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda)$.

(2) Si $k = M$:
De (3.53), (3.57) y (3.55),

$$\begin{aligned}\|Ex\| = \left\|\sum_{i=1}^{M} E_i x\right\| \le \sum_{i=1}^{M} \|E_i x\| = \sum_{i\in A} \|E_i x\| &\le (1+\varepsilon+\varepsilon')M\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon' n_1} \\ &\le (1+\varepsilon+\varepsilon')M\frac{1}{M}g'(1) \le (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda).\end{aligned}$$

En ambos casos, obtenemos una contradicción con nuestra suposición acerca de E.

Recapitulando, lo que hemos probado hasta ahora es que si $\lambda(E) \ge (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$, entonces, usando la proposición 3.34 y que G es creciente,

$$\|Ex\| \le (1+\varepsilon+\varepsilon')G(\lambda(E)) \le (1+\varepsilon+\varepsilon')G(N) = (1+\varepsilon+\varepsilon')Ng(N)^{-1}.$$

Ahora supongamos que $\lambda(E) \le (1+\varepsilon)/\varepsilon' n_1$. De la propiedad (II) de la definición de S.R.C. (definición 3.25) obtenemos que

$$\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1} \le \frac{f'(1)}{2M_f(N/\varepsilon')}$$

lo cual junto con (3.48) nos da que

$$\begin{aligned}\|Ex\| &\le (1+\varepsilon)\left(\lambda(E)+\frac{1}{n_1}\right) \le (1+\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1}+\frac{1}{n_1}\right) = (1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon' n_1} \\ &\le (1+\varepsilon+\varepsilon')\frac{f'(1)}{2M_f(N/\varepsilon')} \le (1+\varepsilon+\varepsilon')f'(1) \le 1+\varepsilon+\varepsilon' \le (1+\varepsilon+\varepsilon')Ng(N)^{-1}\end{aligned}$$

y por lo tanto el lema está probado, tomando $E = \mathrm{ran}(x)$. ■

Construiremos ahora un sistema biortogonal asintótico en algunos de los espacios S_f, pero primero probaremos algunos resultados previos.

Proposición 3.39 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Entonces todo subespacio de dimensión infinita de S_f contiene un subespacio bloque.*

Demostración. Sea Y_1 un subespacio de S_f de dimensión infinita. De la definición de S_f, existe $x_1 \in Y_1$ vector no cero con soporte finito. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $X_n = sp\{\mathbf{e}_i : 1 \le i \le n\}$. Sean $n_1 = \max \mathrm{sop}(x_1)$ y $Z_1 = X_{n_1} \cap Y_1$. Como Z_1 es un subespacio de dimensión finita de Y_1, existe un subespacio de dimensión infinita Y_2 de Y_1 tal que $Y_1 = Z_1 \oplus Y_2$. Luego, existe $x_2 \in Y_2$ vector no cero con soporte finito, y claramente $x_1 < x_2$. Continuando inductivamente este proceso construimos una sucesión creciente de vectores $x_1 < x_2 < \cdots$, que generan un subespacio bloque (véase la definición 3.21) contenido en Y_1. ■

Proposición 3.40 *Sean $f \in \mathscr{F}$ y $X \in \mathscr{X}$ que satisface una f-estimación inferior. Sean $0 < \varepsilon < 1/2$ y $x_1, \ldots, x_k$ una S.R.C. en X para f de longitud k con constante $1+\varepsilon$. Sean $z = \sum_{i=1}^{k} x_i$, y E un intervalo de longitud mayor o igual a 1. Entonces $\|Ez\| > \|Ez\|_\infty$.*

Demostración. De la definición de S.R.C., para $1 \leq i \leq k$, x_i es una $\ell_{1+}^{n_i}$-media con constante $1+\varepsilon$, es decir, $x_i = \sum_{u=1}^{n_i} x_{i,u}$ donde $x_{i,1} < \cdots < x_{i,n_i}$ satisfacen

$$\|x_{i,u}\| \leq (1+\varepsilon)n_i^{-1}, \tag{3.60}$$

y entonces

$$\|x_i\|_\infty = \max_{1\leq u\leq n_i} \|x_{i,u}\|_\infty \leq \max_{1\leq u\leq n_i} \|x_{i,u}\| \leq (1+\varepsilon)n_i^{-1}.$$

Ahora bien, observemos que $M_f(k/\varepsilon) \geq 1$ y $f'(1) \leq 1$ por la proposición 3.6. Por lo tanto, usando además la proposición 3.26 y la parte (II) de la definición de S.R.C. (definición 3.25)

$$n_i \geq n_1 \geq \frac{2(1+\varepsilon)M_f(k/\varepsilon)}{\varepsilon f'(1)} \geq \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \geq \frac{2}{1/2} = 4,$$

de donde

$$\|x_i\|_\infty \leq (1+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2} < 1. \tag{3.61}$$

Recordemos que E es un intervalo con $\lambda(E) \geq 1$. Entonces, o existe un $1 \leq i_0 \leq k$ tal que $\mathrm{sop}(x_{i_0}) \subset E$, o bien existen i tal que $1 \leq i < k$, $r > 1$ y $s < n_{i+1}$ tales que

$$Ez = x_{i,r} + x_{i,r+1} + \cdots + x_{i,n_i} + x_{i+1,1} + x_{i+1,2} + \cdots + x_{i+1,s}$$

con

$$\frac{s}{n_{i+1}} - \frac{r}{n_i} \geq 0, \tag{3.62}$$

puesto que $1 \leq \lambda(E) = (i+1) - i + s/n_{i+1} - r/n_i$. En el primer caso, de (3.61),

$$\|Ez\| \geq \|x_{i_0}\| = 1 > \max_{1\leq j\leq k} \|x_j\|_\infty \geq \|Ez\|_\infty .$$

En el segundo caso, por (3.60) se obtiene que

$$\|Ex_i\| \geq \|x_i\| - \sum_{u=1}^{r-1} \|x_{i,u}\| \geq 1 - (r-1)\frac{1+\varepsilon}{n_i} \tag{3.63}$$

y que

$$\|Ex_{i+1}\| \geq \|x_{i+1}\| - \sum_{u=s+1}^{n_{i+1}} \|x_{i+1,u}\| \geq 1 - (n_{i+1}-s)\frac{1+\varepsilon}{n_{i+1}}. \tag{3.64}$$

Por lo tanto, puesto que X satisface una f-estimación inferior, y usando (3.63), (3.64) y (3.62)

$$\begin{aligned}\|Ez\| &\geq f(2)^{-1}\big(\|Ex_i\| + \|Ex_{i+1}\|\big) \geq f(2)^{-1}\left[2 - (1+\varepsilon)\left(\frac{r-1}{n_i} + \frac{n_{i+1}-s}{n_{i+1}}\right)\right] \\ &\geq f(2)^{-1}\left[2 - (1+\varepsilon)\left(\frac{-1}{n_i} + \frac{n_{i+1}}{n_{i+1}}\right)\right] = f(2)^{-1}\left[2 + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{n_i} - 1\right)\right]\end{aligned} \tag{3.65}$$

Supongamos ahora que $\|Ez\| = \|Ez\|_\infty$. Usando (3.60) y que $n_{i+1} > n_i$ (proposición 3.26),

$$\|Ez\|_\infty = \max_{r\le u\le n_i} \|x_{i,u}\|_\infty \vee \max_{1\le u\le s} \|x_{i+1,u}\|_\infty \le (1+\varepsilon)n_i^{-1} \vee (1+\varepsilon)n_{i+1}^{-1} = (1+\varepsilon)n_i^{-1},$$

lo cual junto con (3.65) implica que

$$\frac{1+\varepsilon}{n_i} \ge f(2)^{-1}\left[2+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{n_i}-1\right)\right]$$

de donde se sigue que

$$2 > f(2) \ge \frac{n_i}{1+\varepsilon}\left[2+(1+\varepsilon)\left(\frac{1}{n_i}-1\right)\right] = n_i\left[\frac{2}{1+\varepsilon}+\frac{1}{n_i}-1\right] = 1+n_i\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Luego, como $1-\varepsilon > 0$,

$$n_i < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \le \frac{1+1/2}{1-1/2} = \frac{3/2}{1/2} = 3,$$

lo cual es una contradicción, y por lo tanto $\|Ez\| > \|Ez\|_\infty$. ■

Proposición 3.41 *Sean $f \in \mathscr{F}$, $0 < \varepsilon < 1/2$ y $x_1, \dots, x_k$ una S.R.C. en S_f para f de longitud k con constante $1+\varepsilon$. Sean $z = \sum_{i=1}^k x_i$, y E un intervalo de longitud mayor o igual a 1. Entonces*

$$\|Ez\| \le \sup\left\{|x^*(Ez)| : M \ge 2,\ x^* \textit{es una } (M,f)\textit{-forma}\right\}.$$

Demostración. Por la proposición 3.40, $\|Ez\| > \|Ez\|_\infty$. Por la definición de la norma en S_f (definición 3.12), concluimos que

$$\|Ez\| = \sup\left\{f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}\|E_j z\| : M \ge 2, E_1 < \cdots < E_M \text{ intervalos}\right\}. \tag{3.66}$$

Sean $M \ge 2$ y $E_1 < \cdots < E_M$ intervalos. Para $1 \le j \le M$, sea x_j^* la funcional soporte para $E_j z$ dada por la proposición 3.28, que cumple $\|x_j^*\| \le 1$, $x_j^*(E_j z) = \|E_j z\|$ y $\operatorname{ran}(x_j^*) \subset \operatorname{ran}(E_j z)$. Sea $x^* = \sum_{j=1}^M f(M)^{-1} x_j^*$. Observemos que $f(M)^{-1}x_1^* < \cdots < f(M)^{-1}x_M^*$, $\|f(M)^{-1}x_j^*\| \le f(M)^{-1}$ y para toda $y \in S_f$, puesto que S_f satisface una f-estimación inferior,

$$\begin{aligned}|x^*(y)| &\le f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}|x_j^*(y)| = f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}|x_j^*(E_j y)| \\ &\le f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}\|x_j^*\|\,\|E_j y\| \le f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}\|E_j y\| \le \|y\|,\end{aligned}$$

de donde $\|x^*\| \le 1$ y por lo tanto x^* es una (M,f)-forma, que satisface

$$f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}\|E_j z\| = f(M)^{-1}\sum_{j=1}^{M}x_j^*(E_j z) = \sum_{j=1}^{M}f(M)^{-1}x_j^*(Ez) = x^*(Ez).$$

De esto último y (3.66) concluimos que

$$\|Ez\| \leq \sup\big\{|x^*(Ez)| : M \geq 2,\ x^* \text{es una } (M,f)\text{-forma}\big\},$$

lo que queríamos demostrar. ■

Sea $f \in \mathscr{F}$, y sean $\delta \in (0,1)$ y $N_1 = M_1^2 < N_2 = M_2^2 < \cdots$ una sucesión de cuadrados que satisfaga

$$f(N_1)/N_1 < \delta/2, \quad f(N_1) > 8\delta^{-1} \tag{3.67}$$

y $N_j > M_f(2N_{j-1})$ para $j > 1$ (que claramente existe puesto que los cuadrados no están acotados, $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$). Sea A_k el conjunto de vectores de norma 1 de la forma $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$ donde $x_1/C, \ldots, x_{N_k}/C$ es una S.R.C. en S_f para f con constante $1 + \delta/2$ para algún $C > 0$. Como S_f satisface una f-estimación inferior, sabemos que

$$\frac{1}{C} = \frac{\|x\|}{C} = \left\|\sum_{i=1}^{N_k} \frac{x_i}{C}\right\| \geq f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \left\|\frac{x_i}{C}\right\| = f(N_k)^{-1} N_k$$

de donde se sigue que

$$C \leq f(N_k) N_k^{-1}. \tag{3.68}$$

Sea A_k^* el conjunto de funcionales de la forma $x^* = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} x_i^*$ donde $x_1^* < \cdots < x_{N_k}^*$ y $\|x_i^*\| \leq 1$ para $1 \leq i \leq N_k$. Observemos que para $x \in S_f$, como S_f satisface una f-estimación inferior,

$$\begin{aligned}
|x^*(x)| &= f(N_k)^{-1} \left|\sum_{i=1}^{N_k} x_i^*(x)\right| \leq f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} |x_i^*(x)| = f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} |x_i^*(\operatorname{ran}(x_i^*)x)| \\
&\leq f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \|x_i^*\|\, \|\operatorname{ran}(x_i^*)x\| \leq f(N_k)^{-1} \sum_{i=1}^{N_k} \|\operatorname{ran}(x_i^*)x\| \leq \|x\|
\end{aligned}$$

Y por lo tanto $\|x^*\| \leq 1$.

Definición 3.42 *Si $f \in \mathscr{F}$ es tal que para toda $x \geq 1$, $f(x^2) \leq 2f(x)$ y $f^{1/2} \in \mathscr{F}$, diremos que f es una* **función de Schlumprecht***, y que el espacio $\bar{S}_f$ es un* **espacio de Schlumprecht***.*

Obsérvese que la función $\tilde{f}$ es una función de Schlumprecht, y por lo tanto el espacio $\bar{S}$ es un espacio de Schlumprecht.

Proposición 3.43 *Si $f \in \mathscr{F}$ es una función de Schlumprecht, entonces los conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{A_k^*\}_{k=1}^\infty$ definidos anteriormente forman un sistema biortogonal asintótico con constante δ en el espacio S_f.*

Demostración. Veamos que los conjuntos A_k son asintóticos para cada k. Para ello, fijemos un $k \in \mathbb{N}$ y un subespacio de dimensión infinita Y de S_f. Sean $\varepsilon = \delta/2$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \geq 2(1+\varepsilon)M_f(N_k/\varepsilon')/\varepsilon' f'(1)$. Por la proposición 3.39, Y contiene un subespacio bloque

B_1 generado por una base bloque $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Por el lema 3.22, B_1 contiene una $\ell_{1+}^{n_1}$-media x_1 con constante $1+\varepsilon$. Ahora, sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\varepsilon'}{2} f(n_2)^{1/2} \geq |\operatorname{sop}(x_1)|$, y sea $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \in [y_i]_{i=1}^{m_1}$, que claramente existe puesto que $x_1 \in B_1$, $\operatorname{sop}(x_1)$ es finito y $B_1 = \langle y_i \rangle_{i=1}^{\infty}$. Observemos que $B_2 = \langle y_i \rangle_{i=m_1+1}^{\infty}$ también es un subespacio bloque contenido en Y, y por lo tanto contiene una $\ell_{1+}^{n_2}$-media x_2 con constante $1+\varepsilon$. Observemos que $x_1 < x_2$. Repitiendo el proceso, construimos una S.R.C. para f de longitud N_k con constante $1+\varepsilon$ contenida en Y. Como Y es un subespacio y los x_i son sucesivos, $0 \neq x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i \in Y$, y entonces $x/\|x\| \in S(Y) \cap A_k$. Por lo tanto, $S(Y) \cap A_k \neq \emptyset$, lo cual prueba que A_k es asintótico.

Sean $j \neq k$ naturales, sea $x \in A_k$, es decir, $x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i$ donde $x_1/C, \ldots, x_{N_k}/C$ es una S.R.C. para f con constante $1+\delta/2$ para algún $C > 0$, y sea $y^* = f(N_j)^{-1} \sum_{i=1}^{N_j} y_i^* \in A_j^*$, con $y_1^* < \cdots < y_{N_j}^*$ y $\|y_i^*\| \leq 1$ para $1 \leq i \leq N_j$. Observemos que y^* es claramente una (N_j, f)-forma, ya que $\|y^*\| \leq 1$ y $\left\|f(N_j)^{-1} y_i^*\right\| \leq f(N_j)^{-1}$ para $1 \leq i \leq N_j$. Hay dos casos posibles:

(1) Si $j > k$ entonces, usando el hecho de que $N_j > M_f(2N_k) = M_f(N_k/\frac{1}{2})$, podemos aplicar el lema 3.31 con $\varepsilon = 1/2$, y obtenemos $|y^*(x/C)| \leq 1 + 1/2 + 1/2 = 2$, de donde se sigue usando (3.68), y que $t/f(t)$ es no decreciente, que

$$|y^*(x)| \leq 2C \leq 2\frac{f(N_k)}{N_k} \leq 2\frac{f(N_1)}{N_1} < \delta.$$

(2) Si $j < k$, observemos que

$$x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i = \sum_{i=1}^{M_k^2} x_i = \sum_{l=0}^{M_k-1} \sum_{i=lM_k+1}^{(l+1)M_k} x_i.$$

Definamos $z_l = \sum_{i=lM_k+1}^{(l+1)M_k} x_i$ para $0 \leq l \leq M_k - 1$. Observemos que de la definición de S.R.C. (definición 3.25) y la proposición 3.26, como $x_1/C, \ldots, x_{N_k}/C$ es una S.R.C. para f de longitud N_k con constante $1+\delta/2$, entonces $x_{lM_k+1}/C, \ldots, x_{(l+1)M_k}/C$ es una S.R.C. para f de longitud M_k con constante $1+\delta/2$. Luego, por la proposición 3.41, para todo intervalo E tal que $\lambda(E) \geq 1$ respecto a $x_{lM_k+1}/C, \ldots, x_{(l+1)M_k}/C$,

$$\|Ez_l/C\| \leq \sup\left\{|x^*(Ez_l/C)| : M \geq 2, x^* \text{es una } (M,f)\text{-forma}\right\}.$$

Por lo tanto, ya que $f^{1/2} \in \mathscr{F}$, z_l/C satisface las hipótesis del lema 3.38 con $f = g$, y entonces

$$\|z_l/C\| \leq (1+\delta/2+\delta/2) M_k f(M_k)^{-1} = (1+\delta) M_k f(M_k)^{-1} \leq 2M_k f(M_k)^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|z_l\| &\leq 2C M_k f(M_k)^{-1} \leq 2f(N_k) N_k^{-1} M_k f(M_k)^{-1} \\ &= 2f(M_k^2) M_k^{-2} M_k f(M_k)^{-1} = 2f(M_k^2) f(M_k)^{-1} M_k^{-1} \end{aligned}$$

Por las hipótesis, $f(M_k^2) \leq 2f(M_k)$. Luego,

$$\|z_l\| \leq 2 \cdot 2f(M_k)f(M_k)^{-1}M_k^{-1} = 4M_k^{-1},$$

de lo cual se sigue que x es una $\ell_{1+}^{M_k}$-media con constante 4.

Observemos que como $N_k > M_f(2N_j)$ entonces $N_k \geq f(N_k) > 36(2N_j)^2$ y por lo tanto $M_k = \sqrt{N_k} \geq 12N_j > 2N_j$, de lo cual se sigue que $2N_j/M_k \leq 1$. Usando esto y el lema 3.23 obtenemos que

$$\begin{aligned}
|y^*(x)| &= \Big|f(N_j)^{-1}\sum_{i=1}^{N_j} x_i^*(x)\Big| \leq f(N_j)^{-1}\sum_{i=1}^{N_j}|x_i^*(x)| = f(N_j)^{-1}\sum_{i=1}^{N_j}|x_i^*\big(\operatorname{ran}(x_i^*)x\big)| \\
&\leq f(N_j)^{-1}\sum_{i=1}^{N_j}\|x_i^*\|\,\|\operatorname{ran}(x_i^*)x\| \leq f(N_j)^{-1}\sum_{i=1}^{N_j}\|\operatorname{ran}(x_i^*)x\| \\
&\leq f(N_j)^{-1}4(1+2N_j/M_k) \leq 8f(N_j)^{-1} \leq 8f(N_1)^{-1} < \delta.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $x \in A_k$ es como antes, puesto que $x_1/C, \ldots, x_{N_k}/C$ es una S.R.C. para f con constante $1+\delta/2$, por la proposición 3.41, para todo intervalo E tal que $\lambda(E) \geq 1$ respecto a $x_1/C, \ldots, x_{N_k}/C$,

$$\left\|\frac{Ex}{C}\right\| \leq \sup\left\{|x^*(Ex/C)| : M \geq 2, x^* \text{es una } (M,f)\text{-forma}\right\},$$

es decir, x satisface las hipótesis del lema 3.38 con $f = g$. Por lo tanto

$$\|x/C\| \leq (1+\delta/2+\delta/2)N_kf(N_k)^{-1} = (1+\delta)N_kf(N_k)^{-1}$$

de donde, recordando que x_i/C es una $\ell_{1+}^{n_i}$-media y por lo tanto $\|x_i/C\| = 1$,

$$1 = \|x\| \leq (1+\delta)N_kf(N_k)^{-1}C = (1+\delta)N_kf(N_k)^{-1}\|x_i\|. \tag{3.69}$$

Así, si x_i^* es una funcional soporte de x_i (dada por la proposición 3.28), entonces $x^* = f(N_k)^{-1}\sum_{i=1}^{N_k} x_i^*$ es un elemento de A_k^* (puesto que las x_i^* son consecutivas y de norma menor o igual a 1) y entonces, usando (3.69),

$$\begin{aligned}
x^*(x) &= f(N_k)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N_k} x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{N_k} x_i\right) = f(N_k)^{-1}\sum_{i=1}^{N_k} x_i^*(x_i) = f(N_k)^{-1}\sum_{i=1}^{N_k}\|x_i\| \\
&\geq f(N_k)^{-1}\sum_{i=1}^{N_k}\frac{f(N_k)}{N_k(1+\delta)} = \frac{1}{1+\delta} = \frac{1-\delta}{1-\delta^2} > 1-\delta,
\end{aligned}$$

con lo que finaliza la prueba. ■

Utilizando la proposición 3.43 y el teorema 2.6 probaremos que para cualquier $C > 1/24$, todo espacio de Schlumprecht puede ser renormado de modo que no contenga ninguna sucesión básica C-incondicional.

Proposición 3.44 *Sean f una función de Schlumprecht y $C > 1/24$. Entonces existe una norma $|||\cdot|||$ en $\bar{S}_f$ equivalente a $\|\cdot\|$ tal que ninguna sucesión básica en $(\bar{S}_f, |||\cdot|||)$ es C-incondicional.*

Demostración. Como $\bar{S}_f$ tiene base, es separable y por lo tanto S_f también. Como $C > 1/24$, $\delta = 1/(36 \cdot 16C^2) < 24^2/576 = 1$, y entonces por la proposición 3.43, S_f contiene un sistema biortogonal asintótico con constante δ. Luego, por el teorema 2.6, existe una norma $|||\cdot|||$ en S_f equivalente a $\|\cdot\|$ tal que ninguna sucesión básica en S_f es $1/\sqrt{36\delta} = 4C$-incondicional. Observemos que como las normas son equivalentes, la función $|||\cdot||| : S_f \to \mathbb{R}$ es $\|\cdot\|$-continua. Como S_f es $\|\cdot\|$-denso en $\bar{S}_f$, podemos extenderla (de manera única) a una función continua $|||\cdot||| : \bar{S}_f \to \mathbb{R}$, la cual claramente es una norma para $\bar{S}_f$.

Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bar{S}_f$ una sucesión básica cualquiera. Del teorema 1.40, $\|y_n\| \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y entonces por la proposición 1.42 $\{y_n/\|y_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica $\|\cdot\|$-normalizada.

Como S_f es $|||\cdot|||$-denso en $\bar{S}_f$, por el teorema 1.47 existe una sucesión básica $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_f$ que es 2-equivalente en la norma $|||\cdot|||$ a $\{y_n/\|y_n\|\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es $4C$-incondicional en la norma $|||\cdot|||$, y entonces existen $m \in \mathbb{N}$, una sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ y una sucesión de escalares $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{m}$ con $|\varepsilon_n| \leq 1$ para $1 \leq n \leq m$ tales que

$$\left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n \right|\right|\right| > 4C \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right|\right|\right|.$$

Ahora, como las sucesiones son 2-equivalentes,

$$\left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \frac{a_n}{\|y_n\|} y_n \right|\right|\right| \geq \frac{1}{2} \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n x_n \right|\right|\right| > \frac{4C}{2} \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} a_n x_n \right|\right|\right| \geq C \left|\left|\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{\|y_n\|} y_n \right|\right|\right|,$$

lo cual prueba que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es C-incondicional. ∎

Ahora probaremos el resultado anunciado al inicio del capítulo.

Proposición 3.45 *Todo espacio de Schlumprecht es arbitrariamente distorsionable.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{F}$ una función de Schlumprecht. Consideremos $\mu > 1$ dada. Observemos que para probar que $\bar{S}_f$ es μ-distorsionable basta considerar subespacios cerrados, puesto que si Z es un subespacio de $\bar{S}_f$ y $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$, entonces

$$\sup\left\{ \frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in Z, \|z_1\| = \|z_2\| = 1 \right\} = \sup\left\{ \frac{|||z_1|||}{|||z_2|||} : z_1, z_2 \in \bar{Z}, \|z_1\| = \|z_2\| = 1 \right\}$$

ya que Z es $\|\cdot\|$-denso en $\bar{Z}$ y $|||\cdot|||$ es una función $\|\cdot\|$-continua. Así pues, sea $X \subset \bar{S}_f$ un subespacio cerrado de $\bar{S}_f$. Entonces, por los teoremas 1.47 y 1.48, existen una sucesión básica $\|\cdot\|$-normalizada $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y una base bloque $\|\cdot\|$-normalizada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bar{S}_f$ 2-equivalentes. Luego, para cualquier sucesión de escalares $\{b_n\}_{n=1}^{m}$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{m} b_n y_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} b_n u_n\right\| \leq 2\left\|\sum_{n=1}^{m} b_n y_n\right\|. \tag{3.70}$$

Sea $C = 4\mu > 4 > 1/24$. Entonces, por la proposición 3.44 existe una norma $|||\cdot|||$ para $\bar{S}_f$ equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $(\bar{S}_f, |||\cdot|||)$ no contiene ninguna sucesión básica C-incondicional. En particular, la sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ no es C-incondicional, es decir, existen $m \in \mathbb{N}$, una sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ y una sucesión de escalares $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{m}$ de módulo a lo más 1 tales que

$$\left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n y_n\right|\right|\right| > C \left|\left|\left|\sum_{n=1}^{m} a_n y_n\right|\right|\right|. \tag{3.71}$$

Sean $w_1 = \sum_{n=1}^{m} a_n y_n$ y $w_2 = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n y_n$. Como la base $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es 1-incondicional (en la norma $\|\cdot\|$) por la proposición 3.16, y puesto que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base bloque,

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n u_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n u_n\right\|.$$

Ahora bien, de esto y (3.70) se sigue que

$$\frac{1}{2}\|w_2\| = \frac{1}{2}\left\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n y_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n a_n u_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n u_n\right\| \leq 2\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n y_n\right\| = 2\|w_1\|. \tag{3.72}$$

Haciendo

$$z_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} \quad \text{y} \quad z_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|},$$

de (3.71) y (3.72) se sigue que

$$\frac{|||z_2|||}{|||z_1|||} > \frac{C}{4} = \frac{4\mu}{4} = \mu,$$

por lo que $(\bar{S}_f, \|\cdot\|)$ es μ-distorsionable. Como esto es para cualquier $\mu > 1$, concluimos que $(\bar{S}_f, \|\cdot\|)$ es arbitrariamente distorsionable. ■

Ahora mostramos que existe una infinidad de espacios de Schlumprecht.

Proposición 3.46 *Sea* $0 < p \leq 1$. *Entonces* $\bar{S}^p = \bar{S}_{\tilde{f}^p}$ *es un espacio de Schlumprecht.*

Demostración. Primero observemos que por las proposiciones 3.7 y 3.8, $\tilde{f}^p \in \mathscr{F}$ y por lo tanto tiene sentido hablar del espacio $\bar{S}_{\tilde{f}^p}$.

Por otro lado, para $x \geq 1$, $x^2 + 1 \leq (x+1)^2$ y por lo tanto

$$\tilde{f}(x^2) = \log_2(x^2+1) \leq \log_2[(x+1)^2] = 2\log_2(x+1) = 2\tilde{f}(x),$$

de donde $[\tilde{f}(x^2)]^p \leq 2^p[\tilde{f}(x)]^p \leq 2[\tilde{f}(x)]^p$. Además, para $0 < p \leq 1$ se tiene que $0 < p/2 \leq 1/2 < 1$, y entonces $(\tilde{f}^p)^{1/2} = \tilde{f}^{p/2} \in \mathscr{F}$ por la proposición 3.8. Por lo tanto, $\tilde{f}^p$ es una función de Schlumprecht, y entonces $\bar{S}^p$ es un espacio de Schlumprecht. ∎

Observemos que en la proposición 3.46 está incluido el caso particular del espacio de Schlumprecht $\bar{S} = \bar{S}_{\tilde{f}}$. Como la propiedad de ser arbitrariamente distorsionable se preserva bajo isomorfismos (proposición 3.3), cabe preguntarse si los espacios $\bar{S}^p$ para $0 < p \leq 1$ son isomorfos, pues entonces no habríamos construido nada nuevo. El teorema 3.49 muestra que este no es el caso, pero antes necesitaremos probar otros dos resultados.

Proposición 3.47 *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $\bar{S}^p$ es reflexivo.*

Demostración. Por la proposición 3.16, la base estándar $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\bar{S}^p$ es incondicional.

Supongamos que $\bar{S}^p$ contiene un subespacio X isomorfo a c_0. Como $\bar{S}^p$ es de Schlumprecht es arbitrariamente distorsionable, y entonces claramente X también lo es. Entonces, por la proposición 3.3 se tendría que c_0 es arbitrariamente distorsionable, lo que contradice la proposición 3.2. Así, $\bar{S}^p$ no contiene ningún subespacio isomorfo a c_0, y análogamente no contiene ninguno isomorfo a ℓ_1. Luego, por el teorema 1.63, $\bar{S}^p$ es reflexivo. ∎

El siguiente lema, a diferencia de muchos de los anteriores, no está tomado del artículo de Gowers y Maurey [13], sino del artículo en el que Schlumprecht mostró la construcción de su espacio [24].

Lema 3.48 *Sea $f \in \mathscr{F}$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, en el espacio S_f*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \right\| = \frac{n}{f(n)}.$$

Demostración. Denotaremos $z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$. Para $n = 1$ el resultado es claro de la proposición 3.16. Ahora sea $n \geq 2$ y supongamos que el resultado es válido para todos los naturales $m < n$. Observemos que de la definición de la norma en S_f (véase la definición 3.12), la proposición 3.16 y la propiedad (i) en la definición de $\mathscr{F}$ (definición 3.4),

$$\|z_n\| \geq \frac{1}{f(n)} \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{e}_i\| = \frac{n}{f(n)} > 1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \right\|_{\infty}. \tag{3.73}$$

Por lo tanto, de la definición de la norma,

$$\|z_n\| = \sup\Big\{ \frac{1}{f(N)} \sum_{i=1}^{N} \|E_i z_n\| : N \geq 2, E_1 < \cdots < E_N \text{ intervalos} \Big\}.$$

Por la observación 3.13, existen $2 \leq m \leq n$ e intervalos $E_1 < \cdots < E_m$ tales que

$$\|z_n\| = \frac{1}{f(m)} \sum_{i=1}^{m} \|E_i z_n\|. \tag{3.74}$$

Obsérvese que podemos suponer que $\max E_m \leq n$. Además, de la demostración de la proposición 3.14, al menos dos de las proyecciones $E_i z_n$ son distintas de cero, y por lo tanto $n_i = |E_i| < n$ para $1 \leq i \leq m$. De la observación 3.15, la hipótesis inductiva y (3.74),

$$\|z_n\| = \frac{1}{f(m)} \sum_{i=1}^{m} \|E_i z_n\| = \frac{1}{f(m)} \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{f(n_i)} = \frac{m}{f(m)} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \frac{n_i}{f(n_i)}. \tag{3.75}$$

Ahora bien, de la propiedad (IV) en la definición de $\mathscr{F}$ (definición 3.4), $x/f(x)$ es una función cóncava, y entonces por la desigualdad de Jensen (proposición 1.3)

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \frac{n_i}{f(n_i)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} n_i}{f\big(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} n_i\big)}. \tag{3.76}$$

Por la proposición 3.5 $x/f(x)$ es una función creciente, y entonces, puesto que claramente $\sum_{i=1}^{m} n_i \leq n$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} n_i}{f\big(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} n_i\big)} \leq \frac{n/m}{f(n/m)}. \tag{3.77}$$

Además, de la propiedad (V) en la definición de $\mathscr{F}$ (definición 3.4), $f(n) \leq f(m) f(n/m)$. De esto, (3.74), (3.75), (3.76) y (3.77),

$$\|z_n\| \leq \frac{m}{f(m)} \frac{n/m}{f(n/m)} = \frac{n}{f(m) f(n/m)} \leq \frac{n}{f(n)}. \tag{3.78}$$

La conclusión de la proposición se sigue de (3.73) y (3.78). ■

Teorema 3.49 *Sean $0 < q < p \leq 1$. Entonces $\bar{S}^q$ y $\bar{S}^p$ no son isomorfos.*

Demostración. Para evitar confusiones, para cada $0 < t \leq 1$ denotaremos por $\{\mathbf{e}_i^{(t)}\}_{i=1}^{\infty}$ a la base estándar de $\bar{S}^t$ y por $\|\cdot\|_t$ a su norma.

Supongamos que existe un isomorfismo $T : \bar{S}^p \to \bar{S}^q$. Sea $x^* \in (\bar{S}^p)^*$. De la proposición 3.47 y el teorema 1.62, la base $\{\mathbf{e}_i^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ es reductora y por lo tanto

$$x^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\mathbf{e}_i^{(p)})^*,$$

y claramente $a_i = x^*(\mathbf{e}_i^{(p)})$. Como la base $\{\mathbf{e}_i^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona (véase la proposición 3.16), $\|(\mathbf{e}_i^{(p)})^*\|_p = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, aplicando el lema 1.37 obtenemos que $\lim_{i\to\infty} x^*(\mathbf{e}_i^{(p)}) = 0$, y entonces $\{\mathbf{e}_i^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero en la topología débil por el teorema 1.30. De la proposición 1.31, T es débilmente continuo y por lo tanto $\{T\mathbf{e}_i^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ también converge débilmente a cero. Del lema 1.49 obtenemos una subsucesión $\{T\mathbf{e}_{i_j}^{(p)}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{T\mathbf{e}_i^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ y una base bloque $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{\mathbf{e}_i^{(q)}\}_{i=1}^{\infty}$ tales que

$$\{T\mathbf{e}_{i_j}^{(p)}\}_{j=1}^{\infty} \text{ es equivalente a } \{y_i\}_{i=1}^{\infty}. \tag{3.79}$$

Además, como T es un isomorfismo,

$$\{T\mathbf{e}_{i_j}^{(p)}\}_{j=1}^{\infty} \text{ es equivalente a } \{\mathbf{e}_{i_j}^{(p)}\}_{j=1}^{\infty}. \tag{3.80}$$

Por otra parte, de la observación 3.15,

$$\{\mathbf{e}_{i}^{(p)}\}_{i=1}^{\infty} \text{ es equivalente a } \{\mathbf{e}_{i_j}^{(p)}\}_{j=1}^{\infty}. \tag{3.81}$$

De (3.79), (3.80) y (3.81), como $\{\mathbf{e}_{i}^{(p)}\}_{i=1}^{\infty}$ es una base incondicional entonces $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ también lo es, y por lo tanto del lema 1.56, si $z_i = y_i/\left\|y_i\right\|_q$ para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es equivalente a } \{z_i\}_{i=1}^{\infty}. \tag{3.82}$$

De (3.79), (3.80), (3.81) y (3.82),

$$\{\mathbf{e}_{i}^{(p)}\}_{i=1}^{\infty} \text{ es equivalente a } \{z_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Luego, por la proposición 1.45, existe $K > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{n}$,

$$\frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i^{(p)}\right\|_p \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i z_i\right\|_q \le K\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i^{(p)}\right\|_p.$$

En particular, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\|\sum_{i=1}^{n} z_i\|_q}{\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i^{(p)}\|_p} \le K. \tag{3.83}$$

Ahora bien, de la definición de la norma en $\bar{S}^q$, puesto que $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base bloque normalizada,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} z_i\right\|_q \ge \frac{1}{[\tilde{f}(n)]^q}\sum_{i=1}^{n}\left\|z_i\right\|_q = \frac{n}{[\tilde{f}(n)]^q}.$$

Por el lema 3.48,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i^{(p)}\right\|_p = \frac{n}{[\tilde{f}(n)]^p}.$$

Entonces,

$$\frac{\|\sum_{i=1}^{n} z_i\|_q}{\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i^{(p)}\|_p} \ge \frac{\frac{n}{[\tilde{f}(n)]^q}}{\frac{n}{[\tilde{f}(n)]^p}} = [\tilde{f}(n)]^{p-q} = [\log_2(n+1)]^{p-q},$$

mas $\lim_{n\to\infty}[\log_2(n+1)]^{p-q} = \infty$ puesto que $p - q > 0$, lo cual contradice (3.83). Por lo tanto, $\bar{S}^q$ y $\bar{S}^p$ no son isomorfos. ■

Así, por las proposiciones 3.45 y 3.46, y el teorema 3.49, hemos construido una infinidad de espacios arbitrariamente distorsionables no isomorfos entre sí.

Comentarios finales

El espacio de Tsirelson fue el primer espacio de Banach “no clásico”. Las normas en los espacios de Banach (de sucesiones) “clásicos”, como c_0, ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de James, etc., se definen mediante fórmulas explícitas. En el espacio de Tsirelson, en cambio, la norma se puede definir mediante una fórmula implícita. Desde entonces se han construido diversas variantes del espacio de Tsirelson con distintas propiedades “patológicas” [4], cuyas normas también se definen de manera implícita, y que han servido para responder otras preguntas que llevaban mucho tiempo sin respuesta, algunas desde la época de Banach.

El espacio de Schlumprecht es una de estas variaciones con normas definidas implícitamente, como se puede ver claramente en la definición 3.12. Una vez que se dio a conocer el espacio de Schlumprecht, no pasó mucho tiempo antes de que se construyeran importantes variaciones de éste que resolvieron problemas abiertos, lo cual confirma su importancia matemática e histórica.

En el verano de 1991, W. T. Gowers encontró un espacio sin sucesiones básicas incondicionales. Poco después, B. Maurey también encontró uno independientemente. Al comparar sus ejemplos descubrieron que eran casi idénticos, al igual que las pruebas de que efectivamente resolvían el problema de la sucesión básica incondicional, así que decidieron publicar juntos y trabajar sobre otras propiedades del espacio. El susodicho ejemplo es un refinamiento del espacio de Schlumprecht, puesto que la definición (implícita) de la norma es casi idéntica excepto por un término extra. La forma de la ecuación que define la norma (compárese con la definición 3.12) es

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x\|_\infty &\vee \sup\left\{\tilde{f}(n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|E_i x\| : 2 \leq n \in \mathbb{N},\, E_1 < \cdots < E_n \text{ intervalos}\right\}\\ &\vee \sup\left\{|g(x)| : g \in G\right\},\end{aligned}$$

donde G es una cierta clase de operadores lineales acotados. La demostración de que el espacio de Gowers y Maurey no tiene sucesiones básicas incondicionales no utiliza herramientas más avanzadas que las que hemos utilizado aquí, pero los detalles técnicos son bastante más engorrosos.

Gracias a una observación de W. B. Johnson, Gowers y Maurey notaron que su espacio es *hereditariamente no factorizable (H.N.F.)*, es decir, ninguno de sus subespacios cerrados de dimensión infinita puede ser expresado como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. Esto respondió una pregunta de Lindenstrauss, a saber, si todo espacio de Banach de dimensión infinita podía ser expresado como suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. Además, prueba que en general el espacio de operadores lineales acotados de un espacio de Banach en sí mismo no necesariamente contiene proyecciones no triviales.

Muy poco tiempo después, Gowers logró resolver, construyendo contraejemplos, otros dos problemas abiertos utilizando variantes de este espacio [11, 12]. El primero es el problema del hiperplano de Banach, que tiene sus orígenes en el libro de Banach [2]: ¿es todo espacio de Banach isomorfo a sus hiperplanos (subespacios cerrados de codimensión uno)? El segundo es el problema de Schroeder-Bernstein para espacios de Banach: si X y Y son espacios de Banach tales que cada uno de ellos es isomorfo a un subespacio complementado del otro, ¿deben X y Y ser isomorfos? En ambos casos, la respuesta es negativa.

Unos cuantos meses después de que se obtuvieron los resultados del artículo en el que se basa este trabajo [13], el problema de la distorsión también fue resuelto, por Edward Odell y Thomas Schlumprecht [21], quienes determinaron que ℓ_p $(1 < p < \infty)$ es arbitrariamente distorsionable, respondiendo a una de las preguntas planteadas en la introducción.

Bibliografía

[1] Stefan Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math.*, 3:133–181, 1922.

[2] Stefan Banach. *Théorie des Opérations Linéaires*. Monografje Matematyczne, Varsovia, 1932.

[3] Czesław Bessaga and Aleksander Pełczyński. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Math.*, 17:151–164, 1958.

[4] Peter George Casazza and Thaddeus J. Shura. *Tsirelson's space*, volumen 1363 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1988.

[5] Mahlon Marsh Day. *Normed linear spaces*, volumen 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlín, 1958.

[6] Mahlon Marsh Day. On the basis problem in normed spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13:655–658, 1962.

[7] Jean Dieudonné. *History of functional analysis*, volumen 49 de *Mathematics Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[8] Per Enflo. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[9] Helga Fetter Nathansky y Berta Gamboa de Buen. *Introducción al análisis funcional y a la geometría de espacios de Banach*. Grupo editorial Iberoamérica, México, D.F., 2002.

[10] Bernard R. Gelbaum. Notes on Banach spaces and bases. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 30:29–36, 1958.

[11] William Timothy Gowers. A solution to Banach's hyperplane problem. *Bull. London Math. Soc.*, 26:523–530, 1994.

[12] William Timothy Gowers. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces. *Bull. London Math. Soc.*, 28:297–304, 1996.

[13] William Timothy Gowers and Bernard Maurey. The unconditional basic sequence problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 6:851–874, 1993.

[14] Hans Hahn. Über Folgen linearer Operationen. *Monatsh. Math. Phys.*, 32:3–88, 1922.

[15] R. Haydon, Edward Odell, Haskell P. Rosenthal and Thomas Schlumprecht. On distorted norms in Banach spaces and the existence of ℓ_p types. *Preprint.*

[16] Robert C. James. Uniformly non-square Banach spaces. *Ann. of Math.*, 80:542–550, 1964.

[17] Joram Lindenstrauss and Aleksander Pełczyński. Contributions to the theory of classical Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 8:225–249, 1971.

[18] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: sequence spaces*, volumen 92 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlín, 1977.

[19] Robert Eugene Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volumen 183 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, Nueva York, 1998.

[20] V. D. Milman. Geometric theory of Banach spaces II, geometry of the unit sphere. *Russian Math. Survey*, 26:79–163, 1971.

[21] Edward Odell and Thomas Schlumprecht. The distortion problem. *Acta Math.*, 173:259–281, 1994.

[22] Aleksander Pełczyński. A note on the paper of I. Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces". *Studia Math.*, 21:371–374, 1962.

[23] Aleksander Pełczyński and Ivan Singer. On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces. *Studia Math.*, 25:5–25, 1964.

[24] Thomas Schlumprecht. An arbitrarily distortable Banach space. *Israel J. Math.*, 76:81–95, 1991.

[25] Thomas Schlumprecht. A complementably minimal Banach space not containing c_0 or ℓ_p. *Seminar notes in Functional Analysis and Partial Differential Equations*, Baton Rouge, Louisiana 1991-2, 169-181.

[26] Andrzej Szankowski. $\mathcal{B}(H)$ does not have the approximation property. *Acta Math.*, 147:89–108, 1981.

[27] Boris S. Tsirelson. Not every Banach space contains ℓ_p or c_0. *Funct. Anal. Appl.*, 8:138–141, 1974.

Índice